Matemática 2 (B)
Segundo Cuatrimestre - 2019

Práctica 3: Resolución numérica de Ecuaciones Diferenciales

1. Dada la siguiente ecuación diferencial:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) & = 2x(t) - 5\,\mathrm{sen}(t), \\ x(0) & = 1 \end{cases}$$

cuya solución exacta es la función $x(t) = 2\,\mathrm{sen}(t) + \cos(t)$.

(a) Escribir la iteración del método de Euler para esta ecuación.

(b) Calcular el error de truncamiento.

(c) ¿Qué paso h debe elegirse para que el error al estimar $x(\pi/2)$ sea menor que 10^{-2}?

2. Graficar simultáneamente en la región $[0,10] \times [0,10]$ las soluciones que se obtienen del problema de valores iniciales

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = (x(t) - 5).(\cos^2(t) - 0{,}5), \\ x(0) = k, \end{cases}$$

al utilizar el método de Euler con paso $h = 0{,}01$ para $k = 0, 1, \ldots, 10$.

3. Considerar el problema $\dot{x}(t) = -2tx(t)$, $x(0) = 1$, con $t \geq 0$.

(a) Determinar una cota, en términos de h, para el error cometido si se usa el método de Euler para calcular $x(1)$.

(b) ¿Cómo debería tomar h si se desea que el error cometido sea menor que 10^{-2}?

(c) Calcular la solución en $t = 1$ usando el valor de h obtenido en el item previo, y verificar las estimaciones previstas comparando con la solución exacta.

4. Escribir un programa que implemente el método de Euler explícito para resolver el problema

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(t, x(t)), \\ x(t_0) = x_0, \end{cases}$$

5. Se quiere verificar numéricamente el orden de convergencia de los métodos de Euler y Taylor de orden 2. Para ello: resolver numéricamente el problema

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = x(t), \\ x(t_0) = 1, \end{cases}$$

en el intervalo $[0,1]$ con ambos métodos, tomando $h = 0{,}1, 0{,}0625, 0{,}05, 0{,}025, 0{,}01$. Para cada h, calcular el error que se comete al aproximar $x(1)$: $E_N = |x(1) - x_N|$. Graficar $\log(E_N)$ en función de $\log(h)$. ¿Qué se espera ver? ¿El resultado es consistente con el esperado?

6. Considerar el problema
$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \lambda x(t), \\ x(0) = x_0, \end{cases}$$
   (a) Verificar que el método de Euler con paso h genera la sucesión $x_n = (1+\lambda h)^n x_0$, para $n = 1, \dots, N$.
   (b) Para $\lambda < 0$, determinar para qué valores de h ocurre que $x_n \to 0$ cuando $n \to \infty$. Comparar con la solución exacta.
   (c) Resolver usando el programa del Ejercicio 4 para distintos valores de $\lambda = 1, 10, 50, 100$ y comparar con la solución exacta. ¿Qué sucede?
   (d) Repetir los items anteriores considerando el método de Euler implícito. ¿Qué se observa?
7. Considerar la ecuación:
$$\begin{cases} \dot{x}(t) = t^{-1}\exp(-x(t)), \\ x(1) = 0, \end{cases}$$
   (a) Probar que $0 \leq x(t) \leq t$ para $t \geq 1$.
   (b) Escribir la iteración dada para esta ecuación por el método de Euler. Probar que la solución numérica resultará creciente.
   (c) Calcular el error de truncado del método de Euler aplicado a la ecuación.
   (d) Dar un valor de paso h que garantice que el error de la estimación numérica de $x(2)$ sea menor que 10^{-3}.
8. Modificar el programa del Ejercicio 4 para que acepte ecuaciones vectoriales, la solución $\mathbf{x}$ deberá ser una matriz de $d \times N$, donde d la cantidad de variables del problema y N es el número de pasos temporales. De este modo, $\mathbf{x}_{j,n} = x_j(t_n)$.
9. Considerar el método de Euler modificado:
$$x_n = x_{n-1} + hf(t_{n-1} + h/2, x_{n-1} + h/2 f(t_{n-1}, x_{n-1})), \tag{1}$$
   probar que el error de truncamiento es $O(h^3)$. ¿Qué ventaja presenta este método respecto del método de Taylor de segundo orden?
10. Probar que si definimos $k_1 = f(t_{n-1}, x_{n-1})$, $k_2 = f(t_{n-1} + \alpha h, x_{n-1} + \alpha h k_1)$ y $x_n = x_{n-1} + h((1-\beta)k_1 + \beta k_2)$, el error de truncamiento es $O(h^3)$ cuando $\alpha\beta = 1/2$. El método $\alpha = 1$, $\beta = 1/2$ se denomina método de Heun.
11. **Galileo:** Leer el siguiente párrafo:

    – Pero, Simplicio, tengo la esperanza de que no seguirás el ejemplo de muchos otros que desvían la discusión de un punto principal y dicen que algunas de mis afirmaciones se apartan de la verdad por un cabello, y por este cabello esconden las faltas de otras teorías tan gruesas como un cable de navío. Aristóteles dice que 'una esfera de hierro de 100 libras, cayendo desde una altura de 100 codos, llega a la tierra antes que una bola de 1 libra haya caído un simple codo'. Yo digo que las dos llegan al mismo tiempo. Tú encuentras, al hacer la experiencia, que la más pesada adelanta a la más ligera en 2 ó 3 dedos; ahora, no puedes esconder detrás de estos dos dedos los 99 codos de Aristóteles, ni puedes mencionar mi error y, al mismo tiempo, pasar en silencio el tuyo, mucho mayor.

Salviati, en *Diálogo sobre dos nuevas ciencias* - Galileo Galilei.

Viviani, estudiante de Galileo, afirma que su maestro realizó efectivamente el experimento descripto en el párrafo anterior, arrojando desde lo alto de la torre de Pisa una bala de cañón y una bala de mosquete. El objetivo de este ejercicio es reproducir numéricamente la experiencia de Galileo.

La posición de un objeto en caída libre puede modelarse con la ecuación:

$$m\ddot{x}(t) = \gamma \dot{x}^2(t) - mg \tag{2}$$

siendo x la altura, m la masa del cuerpo, $g = 9{,}81ms^{-2}$ la aceleración gravitatoria y γ una constante que representa el rozamiento con el fluido en que se produce la caída. Deben darse condiciones sobre la altura y la velocidad iniciales.

La Torre de Pisa mide $55{,}8m$. La masa de una bala de cañón es de $16kg$, y la de una bala de mosquete $8{,}2g$. Las costantes de rozamiento para cada bala son: $\gamma_c = 5{,}8 \times 10^{-3}$ y $\gamma_m = 3{,}74 \times 10^{-5}$, respectivamente (la diferencia se debe a la diferencia de tamaños).

Implementar un programa llamado `galileo` para obtener la dinámica de la caída de ambas balas utilizando el método de Euler modificado, y graficar, en una misma figura, la posición de cada bala en función del tiempo. A partir de los resultados obtenidos, responder:

(a) ¿Cuánto tiempo tarda cada bala en tocar el suelo?

(b) Modificar el programa para que se detenga en el momento en que la bala cañón alcanza el suelo. ¿Cuán lejos del piso está la bala de mosquete?

Nota: No debe cometerse el mismo error que Simplicio al juzgar los resultados. La bala de cañón es alrededor de 2000 veces más pesada que la de mosquete. Consecuentemente, Aristóteles hubiese pronosticado que al llegar la bala de cañón al piso, la de mosquete habría descendido apenas 2 cm.

12. Implementar un programa que resuelva sistemas de la forma:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(t, x(t)), \\ x(t_0) = x_0, \end{cases}$$

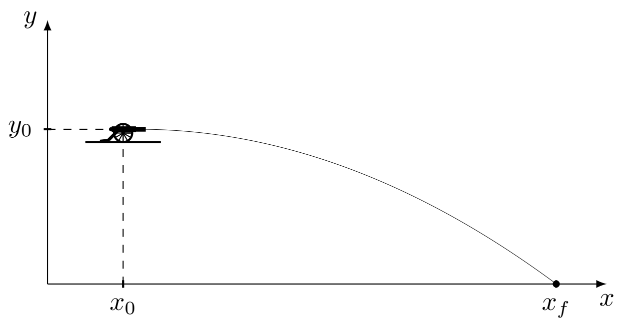
utilizando el método de Runge Kutta de orden 4 dado por:

$$x_n = x_{n-1} + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4), \tag{3}$$

donde:

$$\begin{aligned} k_1 &= f(t_{n-1}, x_{n-1}), \\ k_2 &= f(t_{n-1} + h/2, x_{n-1} + h/2k_1), \\ k_3 &= f(t_{n-1} + h/2, x_{n-1} + h/2k_2), \\ k_4 &= f(t_{n-1} + h, x_{n-1} + hk_3). \end{aligned}$$

Utilizar este método para resolver nuevamente el Ejercicio 17. Comparar la solución con la obtenida con el método de Euler.



13. **Tiro oblicuo:** Un proyectil de masa m se arroja desde un punto del plano (x_0, y_0), con una velocidad inicial dada por el vector (v_0^x, v_0^y). La trayectoria del proyectil se rige por las ecuaciones dadas por la segunda ley de Newton:

$$\begin{cases} m\ddot{x}(t) = -\gamma \dot{x}(t) \\ m\ddot{y}(t) = -mg - \gamma \dot{y}(t), \end{cases}$$

donde g es la aceleración gravitatoria $g = 9{,}81 ms^{-2}$, y γ es una constante de rozamiento con el medio en que se realiza el lanzamiento. Formular el problema en forma de sistema de orden uno.

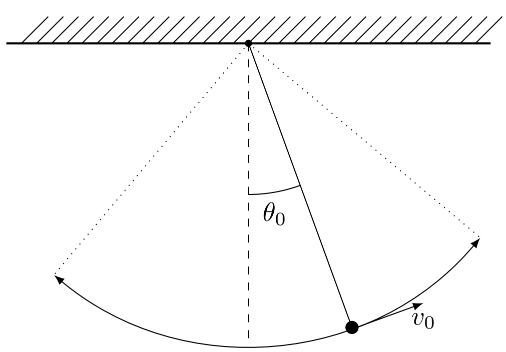
Tomando $m = 10kg$ y $\gamma = 0{,}2kgs^{-1}$, y suponiendo que el proyectil se lanza desde una altura de $30m$ con una velocidad inicial horizontal de $30ms^{-1}$, ¿qué distancia recorre antes de tocar el piso?

Hacer un programa que permita responder esta pregunta, utilizando el método de Euler modificado para resolver el sistema.

14. **Péndulo:** Se considera el problema del péndulo

$$\begin{cases} \ddot{\theta}(t) = -A \operatorname{sen}(\theta(t)) \\ \theta(0) = \theta_0 \\ \dot{\theta}(0) = v_0 \end{cases}$$

donde θ representa el ángulo que forma la vara del péndulo con la vertical.



(a) Formular el problema como un sistema de ecuaciones de primer orden.

(b) Utilizar el método de Euler modificado, con paso $h = 0{,}05$ para obtener una aproximación de la solución en $[0, T]$ y graficarla.

(c) Graficar la solución que se obtiene al utilizar método de Runge–Kutta del Ejercicio 12.

Pueden considerarse, a modo de ejemplo, los valores $A = 7$, $T = 10$, $\theta_0 = \pi/4$, $v_0 = 0$.

15. **Oscilador no lineal:** Dada la ecuación $\ddot{x}(t) = -2x^3(t) + x(t)$

    (a) Formular el problema como un sistema de ecuaciones de primer orden.

    (b) Utilizar el método de Runge-Kutta de cuarto orden para obtener las soluciones correspondientes a las condiciones iniciales $x(0) = -2, -1{,}9, \ldots, 1{,}9, 2$ y $\dot{x}(0) = 0$.

    (c) Graficarlas en el diagrama de fases.

    (d) Graficar la cantidad $\mathcal{H}(t) = \dot{x}^2(t) + x^4(t) - x^2(t)$ para cada solución.

    (e) Obtener el periódo T en cada caso y graficar T vs. $\mathcal{H}$.

16. Obtener el sistema de ecuaciones del circuito de la Figura 1.

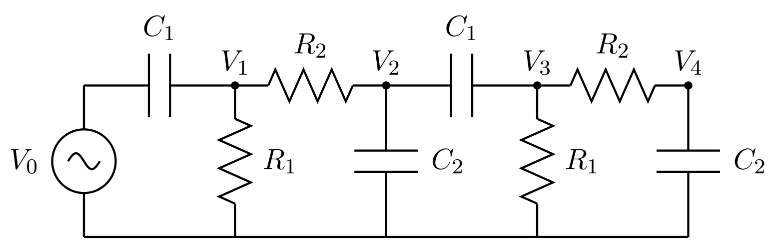


Figura 1:

Resolver numéricamente para $R_1 = 2k\Omega$, $R_2 = 1k\Omega$, $C_1 = 2\mu F$, $C_2 = 1\mu F$ y $V_0 = \cos(\omega t)$. Mostrar que existen $\hat{V}_4(\omega) \in (0, 1)$ y $\phi(\omega) \in (-\pi, \pi]$ tal que $\lim_{t\to\infty} V_4(t) - \hat{V}_4(\omega)\cos(\omega t + \phi(\omega)) = 0$.

17. **Sistema predador-presa:** Dado el sistema

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = -\alpha x(t) + \gamma x(t)y(t), \\ \dot{y}(t) = \beta y(t) - \delta x(t)y(t), \end{cases}$$

    (a) Dar condiciones sobre los parámetros y los niveles de x e y que garanticen la estabilidad de las poblaciones. Es decir, que $x(t) = x(t_0)$ e $y(t) = y(t_0)$ para todo $t > t_0$.

    (b) Elegir valores de α, β, γ, δ, x_0 e y_0 que satisfagan las condiciones del item anterior y resolver. Realizar dos gráficos: uno de x e y en función de t (simultáneamente) y otro de las trayectorias $(x(t), y(t))$. ¿Se mantiene constante la solución?

    (c) Tomando $\alpha = 0{,}25$, $\beta = 1$, $\gamma = \delta = 0{,}01$, $x_0 = 80$ e $y_0 = 30$, resolver y realizar gráficos como los del ítem anterior.

    (d) Modificar $\tilde{\delta} = \lambda\delta$, $\tilde{x}_0 = \lambda^{-1}x_0$ con $\lambda > 0$ (las otras condiciones invariantes) y comparar la solución obtenida con la del item anterior.

    (e) Observar los cambios en la solución si se modifica los parámetros en la forma $\tilde{\alpha} = \lambda\alpha$, $\tilde{\beta} = \lambda\beta$, $\tilde{\gamma} = \lambda\gamma$, $\tilde{\delta} = \lambda\delta$, para $\lambda > 0$.

18. **FitzHugh–Nagumo:** El modelo de FitzHugh-Nagumo es in sistema de ecuacinoes diferenciales de dimensión dos que describe la dinámica de la neurona. Es una versión simplificada del mmodelo tetra-dimensional de Hodkin y Huxley. Este modelo no proporciona una descrición muy precisa del comportamiento de las células nerviosas, pero da una idea del mecanismo de excitación neuronal. Las ecuaciones del modelo FHN son:

$$\begin{cases} \dot{v}(t) = v(t) - v^3(t)/3 - w(t) + I, \\ \dot{y}(t) = v(t) + a - bw(t), \end{cases}$$

donde $v(t)$ represetna el potencial a través de l a membrana, I_{ext} la corriente aplicada (estímulo), $w(t)$ es una variable de recuperación del sistema sin significado biofísico.

Para los valores de parámetros $a = 0{,}7$, $b = 0{,}8$ y $\tau = 12{,}5$ e $I(t) = I_0 H(t - t_{\text{on}})$, donde H es la función Heaviside, $t_{\text{on}} = 100$, $I_0 = 0, 0{,}1, \ldots, 1$ en el intervalo $[0, 500]$. Determinar los valores del estímulo para los cuales el sistema presenta un comportamiento oscilatorio (ciclo límite). Graficar $v(t)$ en función del tiempo y la trayectoria $(v(t), w(t))$ en el espacio de fases.

19. **Atractor de Rössler:** Dado el sistema

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = -y(t) - z(t), \\ \dot{y}(t) = x(t) + ay(t), \\ \dot{z}(t) = -b + z(t)(x(t) - c), \end{cases}$$

obtener las soluciones para $x(0) = y(0) = z(0) = 0$, $a = b = 0{,}1$ y $c = 4, 6, 8, 8{,}5, 8{,}7, 12, 14$, en el intervalo $[0, 1000]$. Graficar las soluciones proyectadas en el plano x, y. Para $c = 14$, graficar las soluciones en el espacio x, y, z.