Matemática 2 (B)
Segundo Cuatrimestre - 2019

Práctica 1: Aproximación de funciones

Polinomio de Taylor.

1. *a*) Para cada caso calcular el polinomio de Taylor de orden n en x_0:
   i) $f_1(x) = e^{2x}$ en $x_0 = 0$, $n = 5$.
   ii) $f_2(x) = xe^{x-1}$ en $x_0 = 1$, $n = 4$.
   iii) $f_3(x) = \arctan(x)$ en $x_0 = 1$, $n = 3$.
   b) Para las funciones $f_i(x)$ del item anterior aproximar el valor indicado:
   i) $f_1(0{,}2)$ y $f_1(2)$
   ii) $f_2(0{,}9)$ y $f_2(x)$ para $x \in (0{,}9, 1{,}1)$
   iii) $f_3(0{,}1)$.

2. *a*) Probar que si $f(x)$ es una función impar, entonces el polinomio de Taylor $P_n(x)$ centrado en $x_0 = 0$ sólo tiene potencias impares. Análogamente, si $f(x)$ es una función par entonces $P_n(x)$ sólo tiene potencias pares.
   b) Calcular el polinomio de Taylor de orden 3 centrado en $x_0 = 0$ de $f(x) = \sin(x)$ y $g(x) = tg(x)$.
   c) Calcular $\lim_{x\to 0} \dfrac{\tan(x) - \sin(x)}{x^3}$.

Aproximación del error.

3. *a*) Para cada una de las siguientes funciones calcular el polinomio de Taylor de orden n en x_0 y encontrar la expresión del resto.
   a) $f_1(x) = \cos(x)$ en $x_0 = 0$,
   b) $f_2(x) = \frac{1}{x-2}$ en $x_0 = 1$.
   c) $f_3(x) = ln(\cos(x))$ en $x_0 = 0$ y $n = 3$.
   b) Para cada una de las funciones del item anterior acotar el error cometido
   a) $f_1(x)$ en $(-\pi, \pi)$, para todo $n \in \mathbb{N}$
   b) $f_2(x)$ en $(0, 2)$ para $n = 1, \ldots, 5$.
   c) $f_3(x)$ en $(-1, 1)$.

4. Para cada función del ejercicio anterior graficar $f_i(x)$ y $P_n(x)$.

5. Calcular un valor aproximado de $\sqrt[3]{7}$ con un error menor que 10^{-4}.

6. Sea $f(x) = \frac{x}{e^x}$. Hallar un valor de n tal que al aproximar $\frac{1}{e}$ por el polinomio de Taylor de orden n en $x_0 = 0$ el error cometido sea menor que 10^{-5}. Luego calcular el valor aproximado de $\frac{1}{e}$ con las cifras decimales que delimita el error permitido.

7. Implementar un programa que reciba como input una función $f(x)$, $n \in \mathbb{N}$ y $x_0 \in \mathrm{R}$ y devuelva el polinomio de Taylor de $f(x)$ de orden n centrado en x_0.

Interpolación polinomial.

8. Para cada uno de los conjuntos de datos dados, calcular el polinomio $p(x)$ interpolador de grado menor o igual que 3:

   a) en la forma de Lagrange,
   b) por coeficientes indeterminados,
   c) utilizando diferencias divididas.

   Verificar los resultados en `Python`. Graficar el polinomio interpolador.

x	-1	0	2	3
y	-1	3	11	27

x	-1	0	1	2
y	-3	1	1	3

9. Agregar a las tablas de datos del Ejercicio **??** el punto $x = 4,\ y = 1$. Calcular los polinomios interpoladores, aumentando las tablas de diferencias divididas.

10. Interpolar cada una de las siguientes funciones en $n + 1$ puntos equiespaciados en el intervalo $[-1, 1]$. Graficar simultáneamente la función con sus respectivos interpoladores para $n = 5, 10, 15$.

$$f_1(x) = \frac{1}{1 + 25x^2}, \qquad f_2(x) = |x|, \qquad f_3(x) = \mathrm{sen}(\pi x).$$

11. Encontrar una función del tipo $2^{ax^3+bx^2+cx+d}$ que interpole la siguiente tabla de datos:

x	-1	0	1	2
y	1	1	0.5	4

12. Hallar y graficar una función del tipo $e^{a_4x^4+a_3x^3+\ldots+a_0}$ que interpole a la función $f(x) = 1/x$ en 5 nodos equiespaciados en el intervalo $[1, 10]$.

13. En una planta química se sintetiza un producto que es utilizado posteriormente como conservante de productos enlatados. El rendimiento del proceso depende de la temperatura.

    Se dispone de los siguientes datos

$T(\circ C)$	150	160	170	180	190	200	210
$R(\%)$	35.5	37.8	43.6	45.7	47.3	50.1	51.2

Se considera un rendimiento óptimo el que va de 38.5 a 45, por lo que la planta trabaja a $175°C$. Si la temperatura de trabajo cae a $162°C$ por una avería, será el proceso satisfactorio hasta que sea reparada?.

14. El pentóxido de dinitrógeno gaseoso puro reacciona en un reactor intermitente según la reacción estequiométrica
$$N_2O_5 \rightleftharpoons 2N_2O_4 + O_2$$
Calculamos la concentración de pentóxido de dinitrógeno existente en ciertos instantes, obteniendo los siguientes datos

$T(s)$	500	700	900	1100	1300	1500	2300
C	5.5	5.04	4.36	3.45	2.37	1.32	0.71

Si lo tenemos en el reactor un tiempo máximo de 35 minutos (2100 segundos), cuál es la concentración de pentóxido de dinitrógeno que queda sin reaccionar?.

Tchebychev

15. Con la computadora

   a) Hallar n de modo que el polinomio P_n que interpola a la función $f(x) = e^{2x}$ en los ceros de T_{n+1} verifique que $\|f - P_n\|_\infty \leq 10^{-2}$ en $[-1, 1]$.

   b) Repetir el ítem anterior para $f(x) = e^x$, $x \in [0, 4]$.

16. Para $n = 5, 10, 15$; graficar simultáneamente el polinomio $W_{n+1}(x) = \prod_{i=0}^{n}(x - x_i)$, donde $x_i = -1 + 2i/n$, $i = 0, \ldots, n$ y el polinomio de Tchebychev T_{n+1}.

17. Repetir el Ejercicio 10 usando los polinomios que interpolan a la función f en los ceros del polinomio de Tchebychev de grado $n + 1$, para $n = 5, 10, 15$.

18. Graficar los polinomios de Lagrange en el intervalo $[-1, 1]$: $L_0(x), \ldots, L_8(x)$, en los casos

   (a) $-1 = x_0 < \cdots < x_8 = 1$ equidistantes ($x_j = j/4 - 1$).

   (b) x_j elegidos con el criterio de Chebyshev ($x_j = \cos((j + 1/2)\pi/9)$).

   (c) x_j elegidos al azar en el intervalo $[-1, 1]$.

Hermite

19. *a*) Sea $f(x) = \cos(\pi x)$, hallar un polinomio de grado menor o igual que 3 que verifique
$$p(-1) = f(-1),\ p(0) = f(0),\ p(1) = f(1),\ p'(1) = f'(1).$$

b) Hallar un polinomio de grado menor o igual que 4 que verifique las condiciones del item anterior, más la condición
$$p''(1) = f''(1).$$

Interpolación lineal y cúbica segmentada

20. En su artículo [1] , Hubert Frings y Mable Frings estudiaron la influencia de la temperatura sobre el número de chirridos por minuto de grillos (neoconocephalus ensinger) machos. A partir de la siguiente tabla (Tabla 1 en H. Frings et al)

$T(\circ C)$	8	9	14	17	18	19	20.5	21.5	23	24	25	26
$N(min^{-1})$	264	285	346	417	438	495	524	540	643	693	744	780

a) Construir el polinomio interpolador en el intervalo $[8, 26]$.

b) Calcular el spline cúbico que interpole los datos.

c) Graficar el polinomio interpolador y el spline. Qué observa?

21. *a*) Sea $a = x_0, \ldots, x_n = b$ una partición regular de $[a, b]$. Implementar un programa que reciba una función f, los límites del intervalo $[a, b]$ y un parámetro n y que mediante la regla de trapecios devuelva un valor aproximado de $\int_a^b f$, partiendo $[a, b]$ en n intervalos.

b) Emplear el programa de (a) para calcular

I) $\int_1^4 \frac{1}{x} dx, \;\; n = 6.$

II) $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} dx, \;\; n = 4.$

III) $\int_1^{5/2} \sqrt[3]{x^2 + 8} dx, \;\; n = 6.$

[1] H. Frings and M. Frings, *The effects of temperature on chirp-rate of male cone-headed grasshoppers, neoconocephalus ensiger*, Journal of Experimental Zoology **134** (1957), n∘ 3