

Matemática II para Biólogos

12 de agosto de 2019

Índice general

1. Aproximación de Funciones	9
1.1. Polinomios de Taylor	9
1.1.1. Estimación del error	10
1.1.2. Aproximación de Padé*	13
1.2. Interpolación polinomial	14
1.2.1. Forma de Lagrange	16
1.2.2. Forma de Newton	18
1.2.3. Diferencias divididas	20
1.3. Fórmula de error de interpolación	22
1.4. Interpolación de Hermite	23
1.5. Interpolación lineal y cúbica segmentada	24
1.5.1. Interpolación lineal	25
1.5.2. Interpolación cúbica	25
1.6. Aplicación	26
1.6.1. Temperatura ambiente	26
1.6.2. Integración	26
1.7. Ejercicios	28

Índice de figuras

1.1.	Gráfico de $f(x) = \text{sen}(x)$ y las aproximaciones de Taylor de orden $n = 3, 5, 7, 9$.	12
1.2.	Gráfico de $f(x) = \ln(1+x)$ y $P_n(x)$ con $n = 2, 3, 4, 5$.	13
1.3.	Gráfico de $f(x) = \text{sech}(x)$ y $P_n(x)$ con $n = 2, 4, 6, 20$.	14
1.4.	Gráfico de $f(x) = \ln(1+x)$ y las aproximaciones de Padé.	14
1.5.	Gráfico de $f(x) = \text{sen}(\pi x)$ y las aproximaciones polinomiales.	17
1.6.	Gráfico de $f(x) = \text{sech}(x)$ y las aproximaciones polinomiales.	17
1.7.	Ubicación de los puntos de interpolación con el criterio de Chebyshev ($n = 5$).	18
1.8.	Gráfico de $f(x) = \text{sech}(x)$ y las aproximaciones polinomiales.	18
1.9.	Gráfico de $L_5(x)$ para distintas distribuciones con $n = 8$.	18
1.10.	Teorema de Rolle.	22
1.11.	Teorema de Rolle generalizado ($n = 3$).	22
1.12.	Ajuste por segmentos lineales para $f(x) = 1.5e^{-x^2/2} + 0.4 \cos(\pi x)$ en $[0, 3]$.	25
1.13.	Ajuste por segmentos cúbicos para $f(x) = 1.5e^{-x^2/2} + 0.4 \cos(\pi x)$ en $[0, 3]$.	26
1.14.	Ajuste por segmentos cúbicos del número de chirridos/min en función de la temperatura.	27

Índice de tablas

1.1. Aproximaciones de Padé $Q_{m,n}$ de $f(x) = \ln(1+x)$ en $x_0 = 0$	14
1.2. Errores $ \ln(1.5) - Q_{m,n}(1.5) $	15
1.3. Número medio de chirridos/min. para individuos machos (n. ensiger).	26

CAPÍTULO 1

Aproximación de Funciones

1.1. Polinomios de Taylor. Vamos a recordar la teoría de polinomios de Taylor. Como en todo el apunte, supondremos, salvo indicación contraria, que $f(x)$ es una función indefinidamente derivable en toda la recta real o en un intervalo de interés. El polinomio de Taylor no es otra cosa que la generalización de la noción de recta tangente a orden mayor. La función lineal tangente es, en un sentido que vamos a precisar, la mejor aproximación lineal de $f(x)$ cerca de x_0 . Geométricamente esto quiere decir que entre todas las rectas, la recta tangente es la que realiza el mayor contacto con el gráfico de la función cerca del punto. En forma analítica esto se expresa de la siguiente forma:

(a) $P_1(x_0) = f(x_0)$.

(b) $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - P_1(x)}{x - x_0} = 0$.

Se puede ver que $P_1(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ es la única función lineal que verifica estas dos condiciones. En efecto, si no valiera la primera condición, el límite de la segunda sería ∞ . Para cualquier otra función lineal que pasa por el punto $(x_0, f(x_0))$, el límite es una constante, lo que quiere decir que la distancia entre la función y su aproximación lineal es (casi) proporcional a la distancia entre x y x_0 . Sólo $P_1(x)$ tiene la propiedad de acercarse a $f(x)$ más rápido que x a x_0 . Como resultado de estas condiciones se obtiene $P_1'(x_0) = f'(x_0)$.

Queremos extender esta noción a funciones cuadráticas, cúbicas, etc. La generalización es sencilla, vamos a buscar una función polinomial $P_n(x)$ de grado n (o menor), llamado polinomio de Taylor de orden n , tal que la distancia entre $f(x)$ y $P_n(x)$ decrezca más rápido que $(x - x_0)^n$, es decir

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - P_n(x)}{(x - x_0)^n} = 0$$

Aplicando la regla de L'Hôpital reiteradamente, se puede ver que la condición anterior es equivalente a $P_n'(x_0) = f'(x_0)$, \dots , $P_n^{(n)}(x_0) = f^{(n)}(x_0)$. A partir de estas igualdades, podemos calcular el polinomio de Taylor de orden n alrededor del punto x_0 :

$$P_n(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2}f''(x_0)(x - x_0)^2 + \dots + \frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)(x - x_0)^n,$$

donde $n! = 1 \times 2 \times \dots \times n$. Si definimos $0! = 1$ y $f^{(0)}(x) = f(x)$, podemos escribir

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} f^{(k)}(x_0)(x - x_0)^k.$$

La idea es que a medida que aumentamos el orden n , $P_n(x)$ aproxime cada vez mejor a $f(x)$. Esto es cierto en muchos casos de interés, pero no siempre. Esto es discutido en una serie de

ejemplos sencillos que nos van a permitir entender las diferentes situaciones. La teoría completa de polinomios y series de Taylor excede el alcance de este apunte.

Ejemplo 1.1 (función exponencial). Si $f(x) = e^x$ y $x_0 = 0$, entonces $f^{(k)}(0) = 1$ y por lo tanto

$$P_n(x) = 1 + x + \cdots + \frac{1}{n!}x^n$$

Tomemos un valor de x cercano $x_0 = 0$, por ejemplo $x = 0.5$. El valor exacto tomando 11 decimales es $f(0.5) = 1.6487212707$. En la siguiente tabla mostramos los errores que se cometen con los polinomios de Taylor de distintos ordenes:

n	$P_n(x)$	$ f(x) - P_n(x) $
1	1.5000000000	0.149
2	1.6250000000	0.237×10^{-1}
3	1.6458333333	0.289×10^{-2}
4	1.6484375000	0.284×10^{-3}
5	1.6486979167	0.234×10^{-4}
6	1.6487196181	0.165×10^{-5}
7	1.6487211682	0.103×10^{-6}
8	1.6487212650	0.566×10^{-8}
9	1.6487212704	0.282×10^{-9}
10	1.6487212707	0.128×10^{-10}

Nota: Puede resultar poco intuitivo el significado de obtener un valor, mediante una medición o un cálculo, con un error (relativo) menor a 10^{-10} . Este error nos dice que el valor aproximado coincide con el valor exacto en los primeros 10 dígitos significativos. Para hacernos una idea concreta de lo que esto representa podríamos pensar la siguiente comparación: si midiéramos la distancia entre un punto de la ciudad de Buenos Aires y uno de la ciudad de Mendoza (aproximadamente 1000 km) con una precisión de 10 dígitos, el error sería menor que 100 μm , una longitud similar al grosor de un cabello humano.

1.1.1. Estimación del error. Para que cualquier aproximación que hagamos a un valor desconocido sea de utilidad, es necesario contar con una idea del error que se está cometiendo. En el ejemplo anterior, conocíamos los primeros 11 dígitos del valor exacto, pero esto es una situación artificial, en un problema real obviamente uno no conoce el valor que quiere calcular. Dicho resultado se obtuvo mediante algún otro procedimiento y la garantía de precisión solo pudo ser dada mediante una estimación del error.

Vamos a obtener una expresión para el resto de Taylor definido por $r_n(x) = f(x) - P_n(x)$, que nos permite estimar el error que se comete al evaluar P_n como aproximación de f . Para $x_1 > x_0$ (el caso $x_1 < x_0$ se estudia de forma similar), podemos escribir

$$f(x_1) = f(x_0) + \int_{x_0}^{x_1} f'(x)dx,$$

El segundo término del lado derecho lo reescribimos usando la fórmula de integración por partes de una forma un poco artificial, dado que $f'(x) = -(f'(x)(x_1 - x))' + f''(x)(x_1 - x)$, tenemos

$$\begin{aligned} f(x_1) &= f(x_0) - f'(x)(x_1 - x) \Big|_{x_0}^{x_1} + \int_{x_0}^{x_1} (x_1 - x)f''(x)dx \\ &= f(x_0) + f'(x_0)(x_1 - x_0) + \int_{x_0}^{x_1} f''(x)(x_1 - x)dx = P_1(x_1) + R_1(x_1). \end{aligned}$$

Análogamente, usando la igualdad

$$f''(x)(x_1 - x) = -\frac{d}{dx} \left(\frac{1}{2}f''(x)(x_1 - x)^2 \right) + \frac{1}{2}f'''(x)(x_1 - x)^2,$$

vemos que

$$f(x_1) = P_2(x_1) + R_2(x_1) = f(x_0) + f'(x_0)(x_1 - x_0) + \frac{1}{2}(x_1 - x_0)^2 f''(x_0) + \frac{1}{2} \int_{x_0}^{x_1} f'''(x)(x_1 - x)^2 dx.$$

Inductivamente, podemos ver $f(x_1) = P_n(x_1) + r_n(x_1)$, donde

$$r_n(x_1) = \int_{x_0}^{x_1} \frac{1}{n!} f^{(n+1)}(x)(x_1 - x)^n dx.$$

Por el teorema de valor medio para integrales, existe $\xi \in [x_0, x_1]$ que verifica

$$f(x_1) = P_n(x_1) + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x_1 - x_0)^{n+1}.$$

El último término, se conoce como fórmula de Lagrange del resto $r_n(x) = f(x) - P_n(x)$. De esta representación obtenemos una acotación del error que se comete aproximando el valor de $f(x)$ por $P_n(x)$:

$$(1.1) \quad |f(x) - P_n(x)| \leq \frac{1}{(n+1)!} \max_{\xi \in [x_0, x]} |f^{(n+1)}(\xi)| (x - x_0)^{n+1}.$$

En la notación de Landau: $f(x) - P_n(x) = O((x - x_0)^{n+1})$, cuando $x \rightarrow x_0$. La desigualdad (1.1) nos muestra que si las derivadas están acotadas (como en el Ejemplo 1.1), $P_n(x) \rightarrow f(x)$ cuando $n \rightarrow \infty$.

En los siguientes ejemplos, analizamos el comportamiento del error para distintos valores de n .

Ejemplo 1.2 (función trigonométrica). Tomemos $f(x) = \sin(x)$ y $x_0 = 0$, las derivadas de orden par $f^{(2k)}(0)$ se anulan, por lo tanto los polinomios de orden par $n = 2k$ tienen grado impar $n - 1$ y vale $P_n(x) = P_{n-1}(x)$. Mostramos los primeros polinomios de grado impar:

$$\begin{aligned} P_1(x) &= x, \\ P_3(x) &= x - \frac{1}{6}x^3, \\ P_5(x) &= x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5, \\ P_7(x) &= x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 - \frac{1}{5040}x^7, \\ P_9(x) &= x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 - \frac{1}{5040}x^7 + \frac{1}{362880}x^9, \\ P_{11}(x) &= x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 - \frac{1}{5040}x^7 + \frac{1}{362880}x^9 - \frac{1}{39916800}x^{11}. \end{aligned}$$

Tomando $x = 0.5$, tenemos $f(0.5) = 0.47942553860$. A continuación mostramos los errores al evaluar con los polinomios de Taylor de orden impar:

n	$P_n(x)$	$ f(x) - P_n(x) $
1	0.500000000000	0.206×10^{-1}
3	0.479166666667	0.259×10^{-3}
5	0.47942708333	0.154×10^{-5}
7	0.47942553323	0.537×10^{-8}
9	0.47942553862	0.122×10^{-10}

Como vemos en la Figura 1.1, el intervalo donde $P_n(x)$ es una buena aproximación de $f(x)$ aumenta con el orden del polinomio. Esto es consecuencia de la fórmula de error, siendo que todas las derivadas de $f(x)$ están acotadas por 1, para $x \in [-b, b]$ el error verifica

$$\max_{x \in [-b, b]} |r_n(x)| \leq \frac{b^n}{(n+1)!}$$

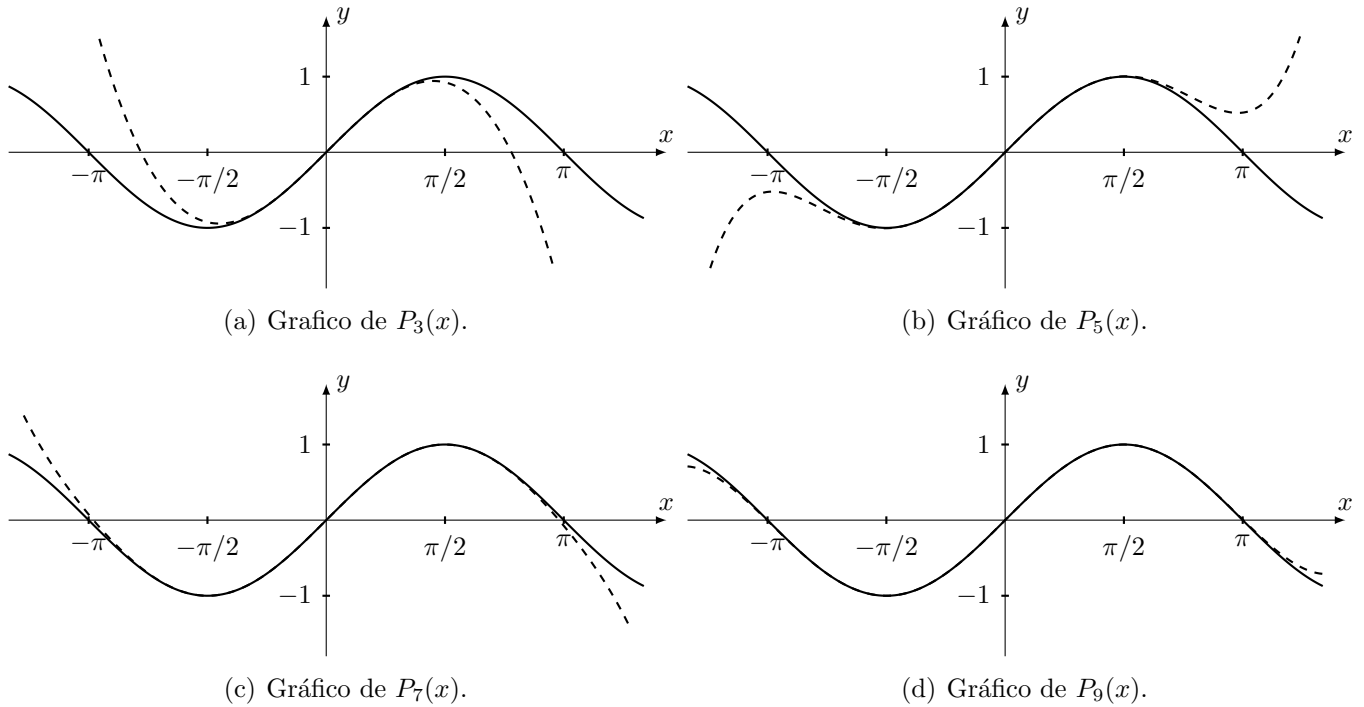


Fig. 1.1: Gráfico de $f(x) = \text{sen}(x)$ y las aproximaciones de Taylor de orden $n = 3, 5, 7, 9$.

En los casos anteriores, la convergencia al verdadero valor es relativamente rápida, cuando aumentamos el orden del polinomio. En el siguiente ejemplo vemos que la convergencia de los polinomios de Taylor es muy lenta, lo que los vuelve ineficiente como método de aproximación de la función.

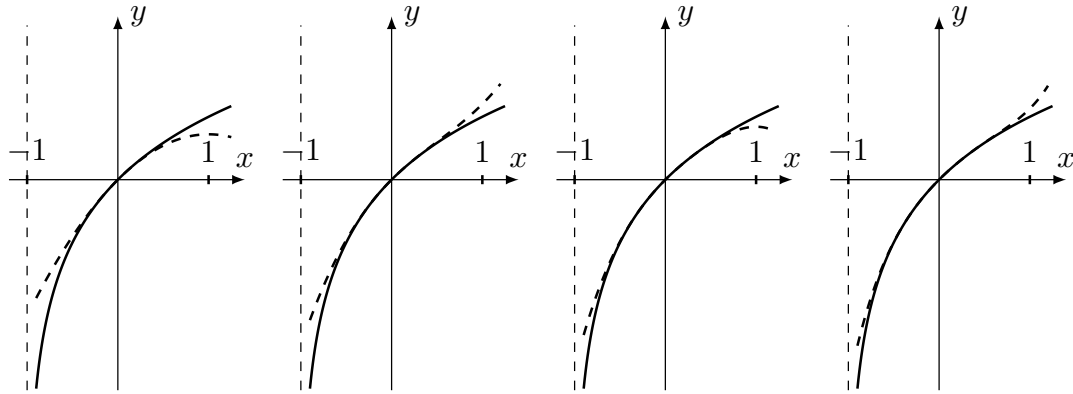
Ejemplo 1.3 (función logarítmica). Consideramos $f(x) = \ln(1+x)$ y $x_0 = 0$, podemos ver el polinomio de Taylor de orden n es

$$P_n(x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots - (-1)^n \frac{x^n}{n}$$

Una vez más consideramos las aproximaciones de $f(0.5) \cong 0.40546510811$ realizadas con los sucesivos polinomios de Taylor

n	$P_n(x)$	$ f(x) - P_n(x) $
1	0.5000000	0.945×10^{-1}
2	0.3750000	0.305×10^{-1}
3	0.4166667	0.112×10^{-1}
4	0.4010417	0.442×10^{-2}
5	0.4072917	0.187×10^{-2}
6	0.4046875	0.778×10^{-3}
7	0.4058036	0.338×10^{-3}
8	0.4053153	0.150×10^{-3}
9	0.4055324	0.672×10^{-4}
10	0.4054346	0.305×10^{-4}

Podemos ver que, en este caso, la convergencia es mucho más lenta que en los ejemplos anteriores. La función tiene una asíntota vertical en $x = -1$, por lo que no podemos esperar convergencia de los polinomios en un intervalo que contenga a ese punto. Pero como observamos en la Figura 1.2), tampoco convergen bien cerca de $x = 1$. Esto se debe a que la región de convergencia de los polinomios de Taylor a la función siempre es un intervalo simétrico con centro x_0 , la cual no puede contener ninguna singularidad de f .



(a) Gráfico de $P_2(x)$. (b) Gráfico de $P_3(x)$. (c) Gráfico de $P_4(x)$. (d) Gráfico de $P_5(x)$.

Fig. 1.2: Gráfico de $f(x) = \ln(1+x)$ y $P_n(x)$ con $n = 2, 3, 4, 5$.

Ejemplo 1.4 (función sech). En el ejemplo anterior claramente la función tiene un punto singular en $x = -1$. Esto produce que la convergencia de $P_n(x)$ a $f(x)$ sea lenta en los puntos cercanos a los extremos del intervalo simétrico $(-1, 1)$. Estudiemos el ejemplo $f(x) = \operatorname{sech}(x)$ que está perfectamente definida en toda la recta real. Sin embargo, como vemos en la Figura 1.3 las aproximaciones de Taylor no convergen más allá de un intervalo simétrico alrededor de $x_0 = 0$. Para entender la razón de este comportamiento deberíamos considerar las extensiones al plano complejo de las funciones, lo que está fuera del alcance de este apunte. A modo de cierre del ejemplo, diremos que la función $f(x) = \operatorname{sech}(x)$ tiene singularidades en los puntos $x = \pm i\pi/2$, lo cuales están a distancia $\pi/2$ del origen.

1.1.2. Aproximación de Padé*. La gran ventaja que tienen los polinomios sobre otra clase de funciones es que pueden ser evaluados a partir de las dos operaciones básicas de los números reales. En los ejemplos discutidos anteriormente, las evaluaciones de $P_n(x)$ pueden realizarse con lápiz y papel (y mucha paciencia). En la introducción planteamos que evaluar funciones racionales tiene complejidad similar a evaluar polinomios. Padé propuso aproximar una función por la mejor función racional, en el sentido de Taylor. Es decir $Q_{m,n}(x)$ es la aproximación de Padé de orden (m, n) de $f(x)$, siendo

$$Q_{m,n}(x) = \frac{a_0 + a_1(x - x_0) + \cdots + a_m(x - x_0)^m}{1 + b_1(x - x_0) + \cdots + b_n(x - x_0)^n}$$

que verifica $f^{(k)}(x_0) = Q_{m,n}^{(k)}(x_0)$ para $k = 0, \dots, m+n$. Estas condiciones determinan en forma unívoca los coeficientes de $Q_{m,n}$. Como ejemplo, tomamos $f(x) = \ln(1+x)$ y $x_0 = 0$. Las aproximaciones de Padé, $Q_{m,n}$, se muestran en la tabla 1.1.

Los errores de calcular $\ln(1.5) \cong 0.47942553860$ mediante $Q_{m,n}$ se muestran en la tabla 1.2. En este ejemplo vemos que se logra una aproximación mejor con el mismo grado de complejidad. Por ejemplo, para evaluar $Q_{3,3}(x)$ tenemos que realizar $3 + 3$ multiplicaciones y 1 división, comparable en complejidad, a evaluar $P_7(x)$, pero el error obtenido es mucho menor.

En la Figura 1.4 se comparan los gráficos de $f(x) = \ln(1+x)$ con las aproximaciones de Padé $Q_{1,1}$, $Q_{2,1}$, $Q_{2,2}$ y el polinomio P_7 .

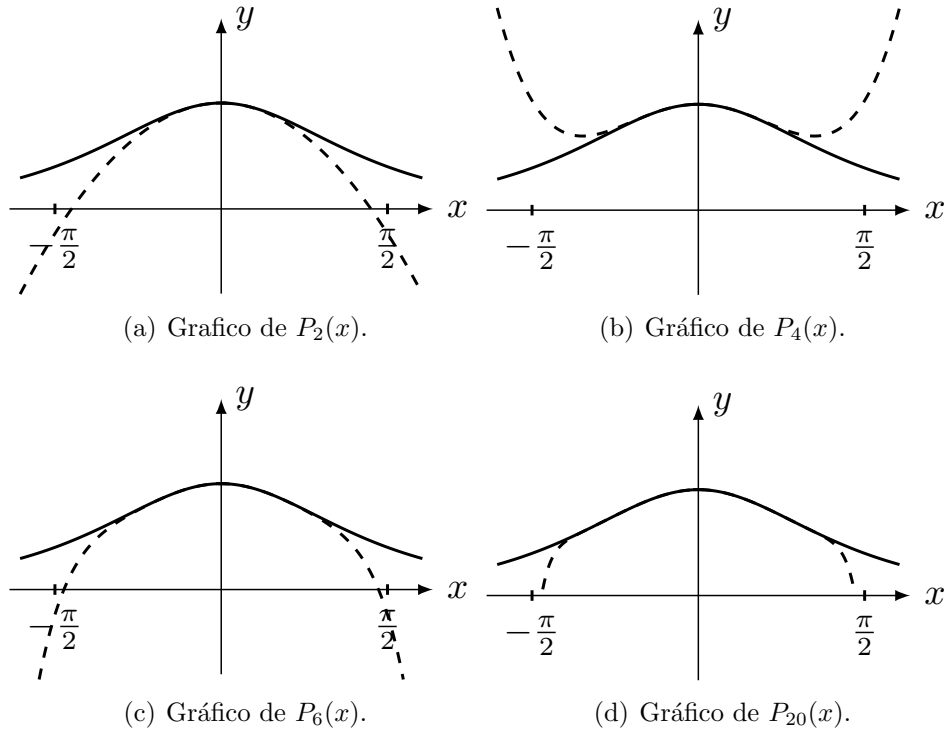


Fig. 1.3: Gráfico de $f(x) = \operatorname{sech}(x)$ y $P_n(x)$ con $n = 2, 4, 6, 20$.

(m, n)	1	2	3
1	$\frac{2x}{x+2}$	$\frac{12x}{-x^2+6x+12}$	$\frac{24x}{x^3-2x^2+12x+24}$
2	$\frac{x(x+6)}{4x+6}$	$\frac{3x(x+2)}{x^2+6x+6}$	$-\frac{3x(19x+30)}{x^3-21x^2-102x-90}$
3	$-\frac{x(x^2-6x-24)}{6(3x+4)}$	$\frac{x(x^2+21x+30)}{9x^2+36x+30}$	$\frac{x(11x^2+60x+60)}{3(x^3+12x^2+30x+20)}$

Tabla 1.1: Aproximaciones de Padé $Q_{m,n}$ de $f(x) = \ln(1+x)$ en $x_0 = 0$.

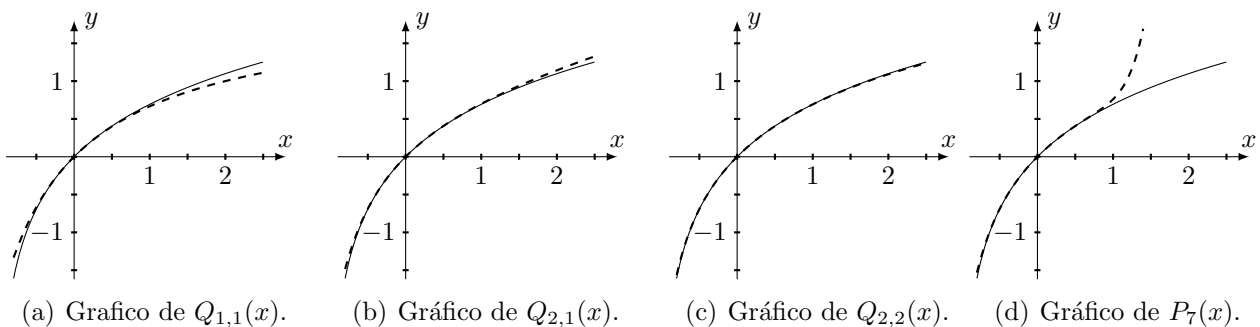


Fig. 1.4: Gráfico de $f(x) = \ln(1+x)$ y las aproximaciones de Padé.

1.2. Interpolación polinomial. En muchos problema científicos o en aplicaciones tecnológicas es frecuente disponer de un cierto número de puntos obtenidos por mediciones o cálculos auxiliares, y se busca construir una función que ajuste a estos datos. Este problema general, se va a tratar en las sucesivas secciones con distintos enfoques. Otro problema que se

(m, n)	1	2	3	4	5
1	0.547×10^{-2}	0.132×10^{-2}	0.402×10^{-3}	0.140×10^{-3}	0.526×10^{-4}
2	0.785×10^{-3}	0.597×10^{-4}	0.966×10^{-5}	0.207×10^{-5}	0.527×10^{-6}
3	0.162×10^{-3}	0.753×10^{-5}	0.627×10^{-6}	0.873×10^{-7}	0.155×10^{-7}
4	0.408×10^{-4}	0.127×10^{-5}	0.745×10^{-7}	0.651×10^{-8}	0.836×10^{-9}
5	0.117×10^{-4}	0.260×10^{-6}	0.113×10^{-7}	0.747×10^{-9}	0.671×10^{-10}

Tabla 1.2: Errores $|\ln(1.5) - Q_{m,n}(1.5)|$.

puede abordar con interpolación es de aproximar una función complicada por una más simple. Si tenemos una función cuyo cálculo resulta costoso, podemos partir de un cierto número de sus valores e interpolar dichos datos construyendo una función más simple. En general, obtendremos los valores de la función con un cierto error, pero dependiendo de las características del problema, la ganancia en simplicidad puede compensar el error cometido. La aproximación que se logra con polinomios de Taylor es local. Con esto queremos decir que es una muy buena aproximación cerca del punto donde se desarrolla, pero no lo es necesariamente en puntos alejados.

En esta sección vamos a estudiar la aproximación de funciones mediante polinomios en un intervalo acotado. El Teorema de Aproximación de Weierstrass¹ nos dice que las funciones reales continuas $f(x)$ definidas en un intervalo cerrado y acotado $[a, b]$ pueden ser aproximadas tanto como se quiera por una función polinomial $p(x)$, es decir

$$\max_{x \in [a, b]} |f(x) - p(x)| < \varepsilon.$$

Este resultado sólo afirma que la aproximación existe, pero no como hallarla. Nos proponemos construir polinomios que aproximen a $f(x)$ con un error apropiado al problema de interés.

Para esto vamos a construir lo que se conoce como un polinomio interpolador de Lagrange. La idea es simple, una función polinomial de grado n , $p(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$, tiene $n + 1$ coeficientes, si conocemos el valor de la función $f(x)$ en $n + 1$ puntos, x_0, x_1, \dots, x_n , podemos determinar el valor de los coeficientes planteando $y_k = p(x_k) = f(x_k)$, o en forma equivalente, resolviendo el sistema de ecuaciones lineales:

$$(1.2) \quad \begin{aligned} y_0 &= a_0 + a_1x_0 + \dots + a_nx_0^n, \\ y_1 &= a_0 + a_1x_1 + \dots + a_nx_1^n, \\ &\vdots \\ y_n &= a_0 + a_1x_n + \dots + a_nx_n^n. \end{aligned}$$

Se puede mostrar la existencia y unicidad del polinomio interpolador a partir del sistema lineal (1.2), dado que la matriz

$$V(x_0, \dots, x_n) = \begin{pmatrix} 1 & x_0 & \dots & x_0^n \\ 1 & x_1 & \dots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & \dots & x_n^n \end{pmatrix},$$

llamada matriz de Vandermonde, siempre es inversible asumiendo que $x_j \neq x_k$ si $j \neq k$. Pero nosotros vamos a seguir un camino distinto para mostrar la existencia sin tener que resolver el sistema de ecuaciones.

¹No confundir con los muchos otros teoremas conocidos como Teorema de Weierstrass

Matriz de Vandermonde Queremos ver que la matriz de Vandermonde es invertible. Consideramos la función

$$w(x) = \det \begin{pmatrix} 1 & x_0 & \cdots & x_0^n \\ 1 & x_1 & \cdots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x & \cdots & x^n \end{pmatrix},$$

desarrollando por la última fila vemos que $w(x)$ es un polinomio de grado menor o igual que n . Podemos ver que el coeficiente de x^n es

$$\begin{pmatrix} 1 & x_0 & \cdots & x_0^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_{n-1} & \cdots & x_{n-1}^{n-1} \end{pmatrix},$$

inductivamente vemos que es no nulo. Además, $w(x_0) = 0, \dots, w(x_{n-1}) = 0$, por lo tanto $w(x) \neq 0$ para todo $x \neq x_0, \dots, x_{n-1}$, en particular $w(x_n) \neq 0$. Esto muestra que $V(x_0, \dots, x_n)$ es invertible.

1.2.1. Forma de Lagrange. Dados los puntos x_0, \dots, x_n definimos los polinomios interpoladores de Lagrange $L_0(x), \dots, L_n(x)$ como

$$L_j(x) = \frac{(x - x_0) \cdots (x - x_{j-1})(x - x_{j+1}) \cdots (x - x_n)}{(x_j - x_0) \cdots (x_j - x_{j-1})(x_j - x_{j+1}) \cdots (x_j - x_n)} = \frac{\prod_{k \neq j} (x - x_k)}{\prod_{k \neq j} (x_j - x_k)},$$

es fácil ver que $L_j(x_j) = 1$ y $L_j(x_k) = 0$ si $k \neq j$. Ahora podemos construir $p_n(x)$ de la forma

$$p_n(x) = f(x_0)L_0(x) + \cdots + f(x_n)L_n(x) = \sum_{j=0}^n f(x_j)L_j(x).$$

Es claro que muchos problemas, por ejemplo cuando utilizamos datos adquiridos con anterioridad, no tenemos posibilidad de elegir los puntos x_0, \dots, x_n . Pero cuando podemos, surgen varias cuestiones:

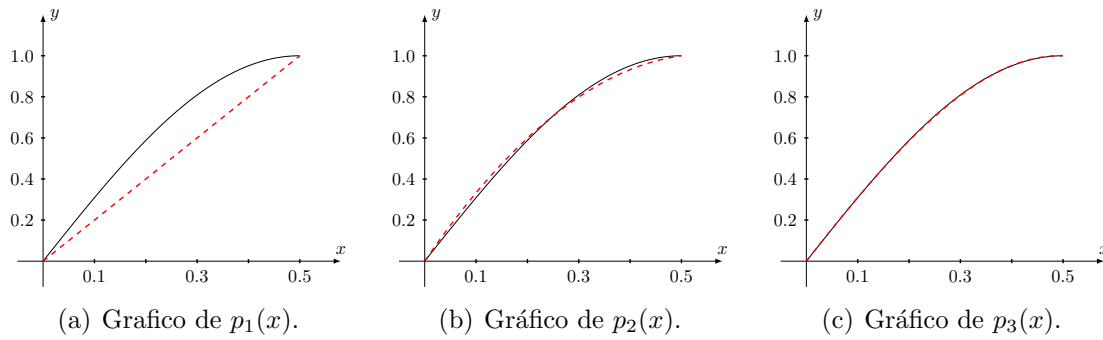
- (I) ¿Cómo elegir los puntos x_0, \dots, x_n ?
- (II) ¿Existe una forma óptima de hacerlo?
- (III) ¿Si $n \rightarrow \infty$, $p_n(x) \rightarrow f(x)$?

Como $f(x)$ y $p_n(x)$ coinciden en x_0, \dots, x_n , parece razonable tomar puntos equidistante en el intervalo $[a, b]$, es decir $x_j = (1 - j/n)a + j/n b$. Veamos que ocurre con algunos ejemplos.

Ejemplo 1.5. Consideremos nuevamente $f(x) = \text{sen}(\pi x)$ en el intervalo $[a, b] = [0, 0.5]$, para distintos valores de n mostramos las diferencias máximas entre la función y los polinomios interpoladores, tomando los puntos equidistantes:

n	máx $ f(x) - p_n(x) $
2	2.1051×10^{-1}
3	2.3537×10^{-2}
4	2.3932×10^{-3}
5	2.1533×10^{-4}
6	1.7105×10^{-5}
7	1.2085×10^{-6}
8	7.6645×10^{-8}
9	4.4015×10^{-9}
10	2.3075×10^{-10}

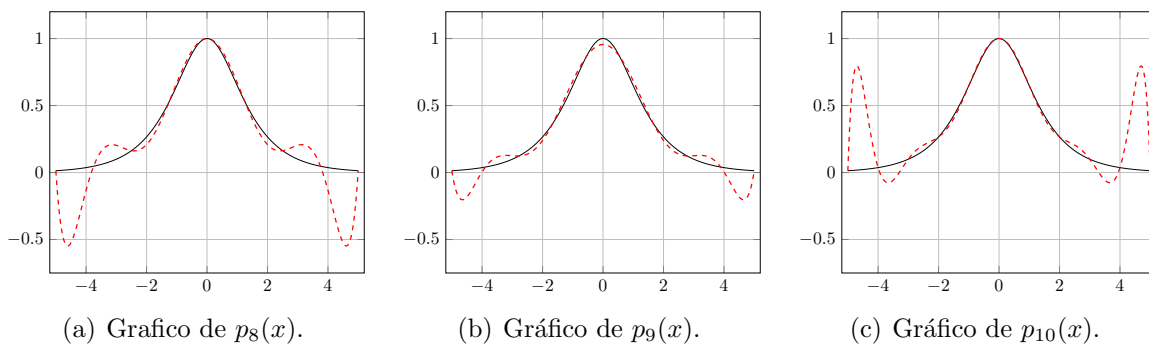
En la figura 1.5 se muestran los gráficos de $p_n(x)$ para distintos valores de n

Fig. 1.5: Gráfico de $f(x) = \text{sen}(\pi x)$ y las aproximaciones polinomiales.

Ejemplo 1.6 (función hiperbólica). Hagamos lo mismo que en el ejemplo anterior para $f(x) = \text{sech}(x)$ y el intervalo $[a, b] = [-5, 5]$, para distintos valores de n mostramos las diferencias máximas entre la función y los polinomios interpoladores:

n	$\text{máx} f(x) - p_n(x) $
2	9.8652×10^{-1}
3	5.9306×10^{-1}
4	5.9135×10^{-1}
5	3.9335×10^{-1}
6	2.5965×10^{-1}
7	4.4200×10^{-1}
8	1.7085×10^{-1}
9	5.6791×10^{-1}
10	2.2243×10^{-1}
11	7.7654×10^{-1}

En la Figura 1.6 mostramos los gráficos de $p_n(x)$ para $n = 8, 9, 10$. Podemos observar el comportamiento oscilatorio de los polinomios interpolantes cerca de los extremos del intervalo.

Fig. 1.6: Gráfico de $f(x) = \text{sech}(x)$ y las aproximaciones polinomiales.

Como muestra el ejemplo anterior, los polinomios interpolantes pueden ser una muy mala aproximación. Una posible solución consiste en distribuir en forma no uniforme los puntos dentro del intervalo. Si creemos que una mayor concentración de puntos mejora la aproximación, podemos espaciarlos en el medio del intervalo y acercarlos en las puntas. Esto se relaciona con la pregunta sobre como elegir en forma óptima los puntos x_0, \dots, x_n . La respuesta fue dada por Chebyshev y es la siguiente: supongamos que el intervalo es $[-1, 1]$, tomamos los puntos

$$x_0 = \cos(\theta), x_1 = \cos(3\theta), \dots, x_n = \cos((2n + 1)\theta),$$

donde $\theta = \pi/(2n + 2)$. Para el caso $n = 5$, mostramos los puntos en la Figura 1.7. Para un

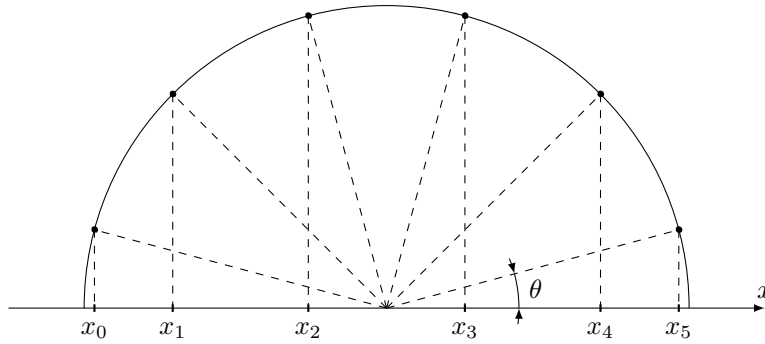


Fig. 1.7: Ubicación de los puntos de interpolación con el criterio de Chebyshev ($n = 5$).

intervalo $[a, b]$ arbitrario, podemos considerar el cambio de variable $h(t) = (1-t)a/2 + (1+t)b/2$. Si $\tilde{f}(t) = f(h(t))$ y $\tilde{p}_n(t)$ el polinomio interpolador de $\tilde{f}(t)$, entonces $p_n(x) = \tilde{p}_n(h^{-1}(x))$.

Volviendo al Ejemplo 1.6, en la Figura 1.8 mostramos los polinomios que se obtienen con los puntos distribuidos con el criterio de Chebyshev. Vemos que las oscilaciones son mucho menores. Se puede ver la diferencia entre los polinomios $L_k(x)$ para la distribución uniforme y

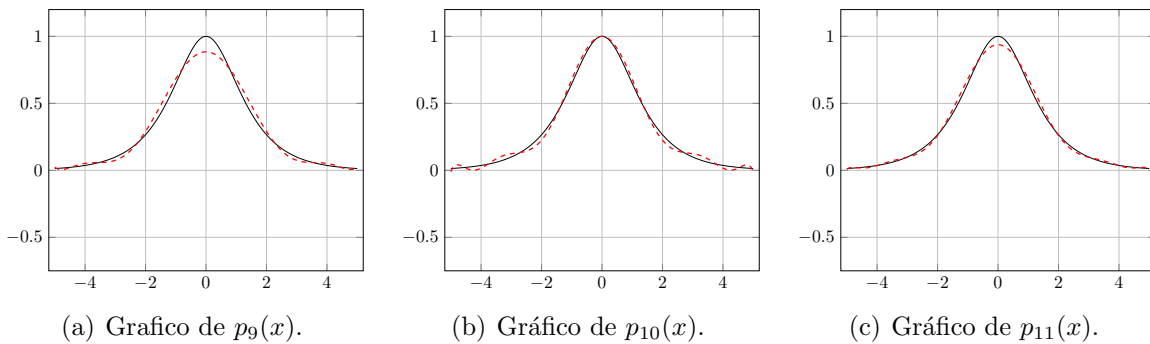


Fig. 1.8: Gráfico de $f(x) = \text{sech}(x)$ y las aproximaciones polinomiales.

la distribución dada por el criterio de Chebyshev. En la Figura 1.9, mostramos $L_5(x)$ para el caso $n = 8$.

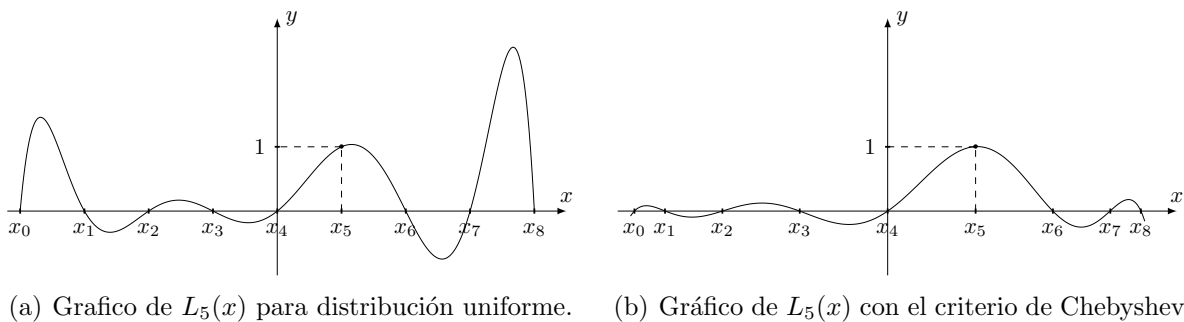


Fig. 1.9: Gráfico de $L_5(x)$ para distintas distribuciones con $n = 8$.

1.2.2. Forma de Newton. Vamos a considerar un procedimiento distinto para determinar los polinomios interpoladores. La idea es similar a la construcción de los polinomios de Taylor, a partir del polinomio de grado k , que verifica $p_k(x_0) = f(x_0), \dots, p_k(x_{k-1}) = f(x_{k-1})$, obtener el polinomio $p_{k+1}(x)$ sumándole al anterior un término de grado $k + 1$ que no modifique

lo anterior y además satisfaga $p_{k+1}(x_k) = f(x_k)$. Comencemos por el caso $n = 1$, la función lineal $p_1(x)$ que satisface $p_1(x_0) = f(x_0)$ y $p_1(x_1) = f(x_1)$ está dada por

$$p_1(x) = f(x_0) + \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}(x - x_0).$$

Para que $p_2(x) = p_1(x) + \text{término cuadrático}$, verifique las condiciones anteriores, el término cuadrático debe anularse en x_0 y en x_1 , por lo tanto se escribe como $a_2(x - x_0)(x - x_1)$. De la condición $f(x_2) = p_2(x_2)$ obtenemos

$$f(x_2) = f(x_0) + \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}(x_2 - x_0) + a_2(x_2 - x_0)(x_2 - x_1),$$

por lo tanto a_2 queda determinado por

$$a_2 = \frac{\frac{f(x_2) - f(x_0)}{x_2 - x_0} - \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}}{x_2 - x_1} = \frac{\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} - \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}}{x_2 - x_0}.$$

Si definimos las diferencias divididas

$$\begin{aligned} f[x_0] &= f(x_0), \\ f[x_0, x_1] &= \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}, \\ f[x_0, x_1, x_2] &= \frac{f[x_1, x_2] - f[x_0, x_1]}{x_2 - x_0}, \end{aligned}$$

tenemos que

$$(1.3) \quad p_2(x) = f[x_0] + f[x_0, x_1](x - x_0) + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1).$$

Ejemplo 1.7. Queremos hallar la función cuadrática $p_2(x)$ interpoladora de la función $f(x)$ con $f(-1) = 1$, $f(1) = -5$ y $f(3) = 5$. Calculando las diferencias divididas obtenemos:

$$\begin{array}{l} f[-1] = 1 \\ f[1] = -5 \\ f[3] = 5 \end{array} \begin{array}{l} \longrightarrow \\ \longrightarrow \\ \longrightarrow \end{array} \begin{array}{l} f[-1, 1] = \frac{-5 - 1}{1 - (-1)} = -3 \\ f[1, 3] = \frac{5 - (-5)}{3 - 1} = 5 \end{array} \longrightarrow f[-1, 1, 3] = \frac{5 - (-3)}{3 - (-1)} = 2,$$

entonces $p_2(x) = 1 - 3(x + 1) + 2(x + 1)(x - 1) = 2x^2 - 3x - 4$.

La expresión anterior no es otra cosa que el método de Gauss–Jordan aplicado al sistema lineal (1.2). En efecto partiendo de este sistema de ecuaciones lineales y aplicando operaciones de fila, tenemos:

- Restamos la segunda fila a la tercera y la primera a la segunda:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -5 \\ 1 & 3 & 9 & 5 \end{array} \right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & -6 \\ 0 & 2 & 8 & 10 \end{array} \right)$$

- Dividimos la segunda y tercer fila por 2

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & -6 \\ 0 & 4 & 8 & 10 \end{array} \right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 4 & 5 \end{array} \right)$$

- Restamos la segunda fila a la tercer fila

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 4 & 5 \end{array} \right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 4 & 8 \end{array} \right)$$

- Dividimos la tercer fila por 4

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 4 & 8 \end{array} \right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array} \right)$$

por lo tanto $a_2 = 2$, $a_1 = -3$ y $a_0 = -4$. En forma general, tenemos

$$\begin{aligned} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & x_0 & x_0^2 & f[x_0] \\ 1 & x_1 & x_1^2 & f[x_1] \\ 1 & x_2 & x_2^2 & f[x_2] \end{array} \right) &\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & x_0 & x_0^2 & f[x_0] \\ 0 & x_1 - x_0 & x_1^2 - x_0^2 & f[x_1] - f[x_0] \\ 0 & x_2 - x_0 & x_2^2 - x_0^2 & f[x_2] - f[x_0] \end{array} \right) \rightsquigarrow \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & x_0 & x_0^2 & f[x_0] \\ 0 & 1 & x_0 + x_1 & f[x_0, x_1] \\ 0 & 1 & x_0 + x_2 & f[x_0, x_2] \end{array} \right) &\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & x_0 & x_0^2 & f[x_0] \\ 0 & 1 & x_0 + x_1 & f[x_0, x_1] \\ 0 & 0 & 1 & f[x_0, x_1, x_2] \end{array} \right), \end{aligned}$$

de donde podemos despejar

$$\begin{aligned} a_2 &= f[x_0, x_1, x_2], \\ a_1 &= f[x_0, x_1] - (x_0 + x_1)f[x_0, x_1, x_2], \\ a_0 &= f[x_0] - x_0f[x_0, x_1] + x_0x_1f[x_0, x_1, x_2], \end{aligned}$$

y por lo tanto

$$p_2(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 = f[x_0] + f[x_0, x_1](x - x_0) + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1).$$

Esto se puede generalizar a cualquier número de puntos, como vemos a continuación.

1.2.3. Diferencias divididas. Vamos a definir las diferencias divididas en general en forma inductiva: $f[x_0] = f(x_0)$,

$$(1.4) \quad f[x_0, \dots, x_k] = \frac{f[x_1, \dots, x_k] - f[x_0, \dots, x_{k-1}]}{x_k - x_0}.$$

Se puede ver que el polinomio interpolador está dado por

$$(1.5) \quad p_n(x) = f[x_0] + f[x_0, x_1](x - x_0) + \dots + f[x_0, \dots, x_n] \prod_{j=0}^{n-1} (x - x_j).$$

Las diferencias divididas se pueden obtener mediante el Algoritmo 1.1: x_list contiene la lista de puntos, x_0, \dots, x_n y f_list los valores $f(x_0), \dots, f(x_n)$. En df_list obtenemos las diferencias divididas $f[x_0], f[x_0, x_1], \dots, f[x_0, \dots, x_n]$.

Algoritmo 1.1: Diferencias divididas.

Data: n, x_list, f_list
Result: df_list
 $df_list = f_list;$
for $k = 1$ **to** n **do**
 for $j = n$ **to** k **do**
 $df_list(j) =$
 $(df_list(j) - df_list(j - 1)) / (x_list(j) - x_list(j - k));$
 end
end
return $df_list;$

Para mostrar que $p_n(x_j) = f(x_j)$ para $j = 0, \dots, n$ usamos un argumento inductivo. Es claro que (1.5) es el polinomio interpolador para el caso $n = 1$. Supongamos que se verifica para $n - 1$ puntos, entonces los polinomios de orden $n - 1$ definidos como

$$p_{n-1}(x) = f[x_0] + f[x_0, x_1](x - x_0) + \dots + f[x_0, \dots, x_{n-1}] \prod_{j=0}^{n-2} (x - x_j),$$

$$q_{n-1}(x) = f[x_1] + f[x_1, x_2](x - x_1) + \dots + f[x_1, \dots, x_n] \prod_{j=1}^{n-1} (x - x_j),$$

verifican $p_{n-1}(x_j) = f(x_j)$ para $j = 0, \dots, n - 1$ y $q_{n-1}(x_k) = f(x_k)$ para $k = 1, \dots, n$. Siendo que

$$p_n(x) = p_{n-1}(x) + f[x_0, \dots, x_n] \prod_{j=0}^{n-1} (x - x_j),$$

tenemos que $p_n(x_j) = f(x_j)$ para $j = 0, \dots, n - 1$. De la definición (1.4) tenemos

$$f[x_1, \dots, x_k] = f[x_0, \dots, x_{k-1}] + f[x_0, \dots, x_k](x_k - x_0),$$

por lo tanto

$$q_{n-1}(x_n) = (f[x_0] + f[x_0, x_1](x_1 - x_0)) + (f[x_0, x_1] + f[x_0, x_1, x_2](x_2 - x_0))(x_n - x_1)$$

$$+ \dots + (f[x_0, \dots, x_{n-1}] + f[x_0, \dots, x_n](x_n - x_0)) \prod_{j=1}^{n-1} (x_n - x_j) = p_n(x_n),$$

por lo tanto $p_n(x_n) = f(x_n)$. Esto muestra que $p_n(x)$ es el polinomio interpolador.

El polinomio $p_n(x)$ se puede evaluar mediante la forma Horner:

$$p_n^{(0)}(x) = f[x_0, \dots, x_n],$$

$$p_n^{(1)}(x) = f[x_0, \dots, x_{n-1}] + (x - x_{n-1})p_n^{(0)}(x),$$

$$p_n^{(2)}(x) = f[x_0, \dots, x_{n-2}] + (x - x_{n-2})p_n^{(1)}(x),$$

$$\vdots$$

$$p_n(x) = p_n^{(n)}(x) = f[x_0] + (x - x_0)p_n^{(n-1)}(x),$$

que requiere n productos para su evaluación. Podemos ver el cálculo en el Algoritmo 1.2.

Algoritmo 1.2: Polinomio interpolador.

Data: n, df_list, x_list, x
Result: p
 $p = df_list(n);$
for $k = n - 1$ **to** 0 **do**
 $p = df_list(k) + (x - x_list(k)) * p;$
end
return $p;$

1.3. Fórmula de error de interpolación. En esta sección vamos a estudiar el error $r_n(x) = f(x) - p_n(x)$ que se comete al aproximar una función por el polinomio interpolador de Lagrange. La fórmula es similar a la obtenido para el polinomio de Taylor, para todo x en el intervalo, existe ξ tal que

$$r_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} W(x),$$

donde $W(x) = (x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_n)$. En la sección siguiente mostramos que ambos son casos particulares de un resultado más general.

0 Necesitamos un versión general del Teorema de Rolle. Recordemos es resultado original: si una función toma en dos puntos el mismo valor, $h(x_0) = h(x_1)$, entonces existe un punto $\xi \in (x_0, x_1)$ donde vale $h'(\xi) = 0$ (ver Figura 1.10).

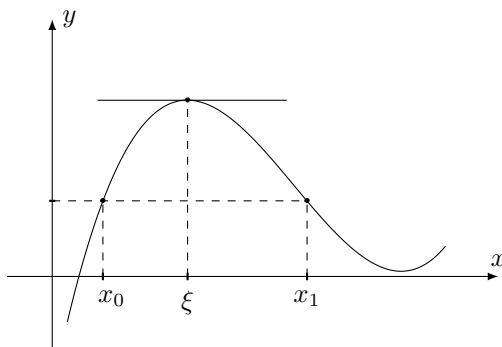


Fig. 1.10: Teorema de Rolle.

Supongamos ahora que existen $n + 1$ puntos $x_0 < x_1 < \dots < x_n$ para los cuales se verifica $h(x_0) = h(x_1) = \dots = h(x_n)$, afirmamos que existe un punto $\xi \in (x_0, x_1)$. Empezamos por un ejemplo, en la Figura 1.11 mostramos una función $h(x)$ que se anula en cuatro puntos, x_0, x_1, x_2, x_3 , en cada intervalo existe un punto ζ_k donde se anula $h'(x)$. Como $h'(\zeta_0) = h'(\zeta_1) = h'(\zeta_2)$ (que valgan cero es irrelevante), existen dos puntos, $\eta_0 \in (\zeta_0, \zeta_1)$ y $\eta_1 \in (\zeta_1, \zeta_2)$, donde se anula $h''(x)$. Aplicando por última vez el Teorema de Rolle vemos que existe ξ donde se verifica $h'''(\xi) = 0$.

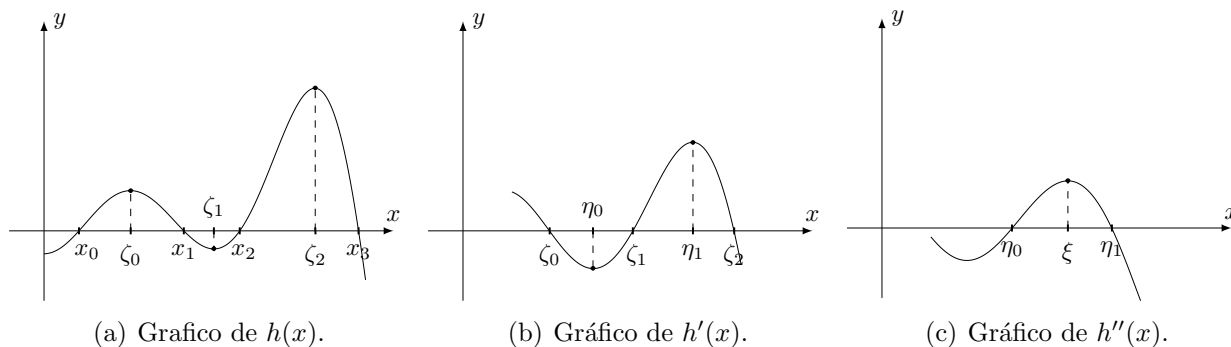


Fig. 1.11: Teorema de Rolle generalizado ($n = 3$).

La demostración general se basa en el principio de inducción. Por el Teorema de Rolle existe $\zeta_{k-1} \in (x_{k-1}, x_k)$ donde $h'(\zeta_{k-1}) = 0$, es decir que la función $h'(x)$ se anula en n puntos $\zeta_0, \dots, \zeta_{n-1}$. Aplicando en forma inductiva el resultado a la función derivada $h'(x)$ para n puntos, vemos que existe ξ tal que $0 = (h')^{(n-1)}(\xi) = h^{(n)}(\xi)$.

Ahora vamos a obtener cotas del error de las aproximaciones de interpolación. Dados $n + 1$ puntos en el intervalo (a, b) , $a \leq x_0 < x_1 < \dots < x_n \leq b$, definimos el polinomio de grado $n + 1$ que se anula en esos puntos: $W(x) = (x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_n)$. Fijado un punto $x \neq x_j$ ($j = 0, \dots, n$), consideramos la función auxiliar $h(t)$ dada por

$$h(t) = f(t) - p_n(t) - r_n(x) \frac{W(t)}{W(x)},$$

es fácil ver que $h(x_j) = 0$ y $h(x) = 0$. Como $h(t)$ se anula en $n + 2$ puntos, entonces existe $\xi \in [a, b]$ que verifica $h^{(n+1)}(\xi) = 0$. Por lo tanto

$$0 = f^{(n+1)}(\xi) - p_n^{(n+1)}(\xi) - r_n(x) \frac{W^{(n+1)}(\xi)}{W(x)}.$$

Como $p_n(t)$ es un polinomio de grado n , vale $p_n^{(n+1)}(t) = 0$. Por otro lado $W(x)$ es un polinomio de grado $n + 1$ mónico ($W(t) = t^{n+1} + \dots$), entonces $W^{(n+1)}(t) = (n + 1)!$. Esto muestra que

$$r_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n + 1)!} W(x),$$

por lo tanto vale la estimación del error

$$(1.6) \quad |r_n(x)| \leq \frac{1}{(n + 1)!} \max_{\xi \in [a, b]} |f^{(n+1)}(\xi)| |W(x)|.$$

1.4. Interpolación de Hermite. En la aproximación de Taylor consideramos los valores de la función y sus derivadas en un punto. Por otro lado, en la interpolación de Lagrange, consideramos los valores de la función en diferentes puntos. En esta sección combinamos los dos enfoques, queremos aproximar una función conociendo los valores de la misma y algunas de sus derivadas en distintos puntos. En los puntos x_0, x_1, \dots, x_m , la función $f(x)$ verifica

$$f^{(k)}(x_j) = y_{j,k}, \text{ para } j = 0, \dots, m \text{ y } k = 0, \dots, q_j - 1.$$

Queremos hallar un polinomio de grado menor o igual que $n = q_0 + \dots + q_m - 1$ que verifique las condiciones anteriores, dicho polinomio lo llamaremos polinomio de Hermite. El polinomio de Taylor corresponde a $q_0 = n + 1$ y $q_1 = \dots = q_m = 0$ y el polinomio interpolador de Lagrange a $q_0 = \dots = q_m = 1$, con $m = n$.

Nota: Podemos hacer una demostración no constructiva de la existencia del polinomio de Hermite, si definimos la aplicación lineal Γ entre el espacio vectorial Π_n de los polinomios de grado menor o igual que n y \mathbb{R}^{n+1} definida por

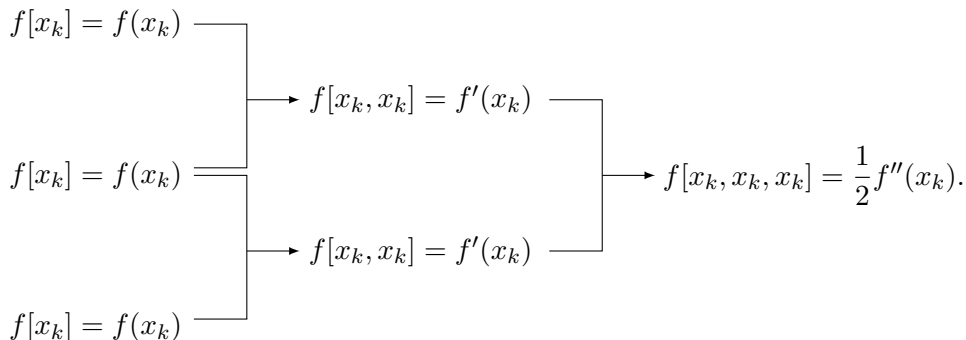
$$\Gamma(P) = \left(P(x_0), \dots, P^{(q_0-1)}(x_0), \dots, P(x_m), \dots, P^{(q_m-1)}(x_m) \right),$$

podemos ver que $\text{Nu}(\Gamma) = \{0\}$. Si $\Gamma(P) = \mathbf{0}$, entonces x_j es un cero de orden q_j de P , por lo tanto P tiene $n + 1 = q_0 + \dots + q_m$ ceros contando su multiplicidad. Como el grado de P es menor o igual que n , $P(x) = 0$. Dado que la dimensión de Π_n es también $n + 1$, Γ es un isomorfismo. Entonces el polinomio $\Gamma^{-1}(\mathbf{y})$ es el polinomio de Hermite, donde $\mathbf{y} = (y_{0,0}, \dots, y_{0,q_0-1}, \dots, y_{m,0}, \dots, y_{m,q_m-1})$.

Para obtener el polinomio de Hermite consideramos las diferencias divididas para valores repetidas de x , por ejemplo si la condición en el punto x_k es el valor de $f(x)$ y sus $q - 1$ primeras derivadas, es decir $f(x_k), \dots, f^{(q)}(x_k)$, entonces planteamos las diferencias divididas:

$$f[x_k] = f(x_k), f[x_k, x_k] = f'(x_k), \dots, \underbrace{f[x_k, \dots, x_k]}_{q \text{ números}} = \frac{1}{(q - 1)!} f^{(q-1)}(x_k),$$

por ejemplo para $q = 3$ las diferencias divididas son



Ejemplo 1.8. Queremos hallar la función polinomial $p_5(x)$ interpoladora de la función $f(x)$ con $f(-1) = -3$, $f'(-1) = -1$, $f(0) = 0$, $f'(0) = 2$, $f''(0) = -6$ y $f(1) = -1$. Las diferencias divididas obtenemos:

x_k	$f(x_k)$				
-1.	-3.				
		-1.			
-1.	-3.	4.			
		3.	-5.		
0.	0.	-1.	3.		
		2.	-2.	-1.	
0.	0.	-3.	1.		
		2.	0.		
0.	0.	-3.			
		-1.			
1.	-1.				

$$\begin{aligned} p_5(x) &= -3 - (x + 1) + 4(x + 1)^2 - 5(x + 1)^2x + 3(x + 1)^2x^2 - (x + 1)^2x^3 \\ &= -3 + (x + 1)(-1 + (x + 1)(4 + x(5 + x(3 - x)))) \end{aligned}$$

La información sobre la función se puede dar en la forma de una lista de listas $\{l_0, \dots, l_m\}$ donde $l_j = \{x_j, y_{j,0}, \dots, y_{j,q_j-1}\}$. Si armamos los vectores

$$\begin{aligned} x_list &= (x_0 \dots x_0 \ x_1 \dots x_1 \dots x_m \dots x_m) \\ y_list &= (y_{0,0} \dots y_{0,0} \ y_{1,0} \dots y_{1,0} \dots y_{m,0} \dots y_{m,0}) \end{aligned}$$

Algoritmo 1.3: Diferencias divididas.

Data: n, x_list, y_list

Result: df_list

$df_list = f_list;$

for $k = 1$ **to** n **do**

for $j = n$ **to** k **do**

if $x_list(j) == x_list(j - k)$ **then**

$df_list(j) = l(j, k);$

else

$df_list(j) = (df_list(j) - df_list(j - 1)) / (x(j) - x(j - k));$

end

end

return $df_list;$

1.5. Interpolación lineal y cúbica segmentada. Si queremos aproximar una función en un número grande de nodos, el polinomio interpolador resulta de grado muy alto. Esto presenta dos problemas: el costo de evaluar el polinomio y la inestabilidad numérica que presentan. Una alternativa es separar el intervalo $[a, b]$ en subintervalos y realizar la interpolación en cada uno de ellos. En cada subintervalo tendremos un polinomio interpolador diferente, pero al momento de evaluar, solo debemos decidir a que subintervalo pertenece el valor de x y evaluar la expresión correspondiente. Esto muestra que la complejidad no aumenta con el números de nodos.

1.5.1. Interpolación lineal. El problema de esta técnica es la falta de suavidad de la función partida interpolante. Lo mínimo que le pedimos es que sea continua, en ese caso basta considerar en cada intervalo funciones lineales. En forma más precisa, si $a = x_0 < \dots < x_n = b$, definimos $s_n(x)$ como la función partida

$$s_n(x) = \begin{cases} f(x_0) \frac{x_1 - x}{x_1 - x_0} + f(x_1) \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} & , \text{ si } x \in [x_0, x_1], \\ \vdots & \vdots \\ f(x_{n-1}) \frac{x_n - x}{x_n - x_{n-1}} + f(x_n) \frac{x - x_{n-1}}{x_n - x_{n-1}} & , \text{ si } x \in [x_{n-1}, x_n]. \end{cases}$$

En la Figura 1.12 se grafica la función $f(x) = 1.5e^{-x^2/2} + 0.4 \cos(\pi x)$ y su aproximación mediante funciones lineales a trozos en el intervalo $[0, 3]$ con $n = 4$.

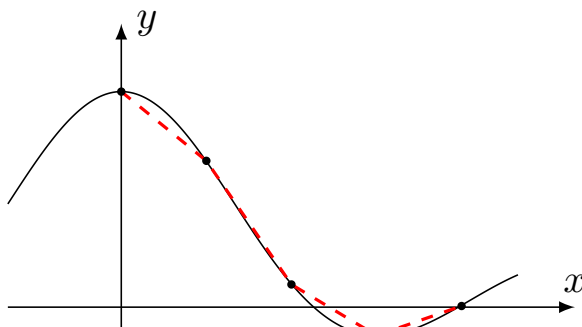


Fig. 1.12: Ajuste por segmentos lineales para $f(x) = 1.5e^{-x^2/2} + 0.4 \cos(\pi x)$ en $[0, 3]$.

Usando (1.6), podemos ver que para $x \in [x_{j-1}, x_j]$ se verifica

$$|f(x) - s_n(x)| \leq \frac{1}{2} \max_{\xi \in [a, b]} |f''(\xi)| (x_j - x)(x - x_{j-1}).$$

Si los puntos son equidistantes, $x_j - x_{j-1} = \frac{b-a}{n}$, entonces $(x_j - x)(x - x_{j-1}) \leq \frac{(b-a)^2}{4n^2}$ y por lo tanto

$$|f(x) - s_n(x)| \leq \max_{\xi \in [a, b]} |f''(\xi)| \frac{(b-a)^2}{8n^2}.$$

1.5.2. Interpolación cúbica. Si queremos que la función interpolante sea derivable, debemos aumentar el grado de los polinomios en cada subintervalo. Si por ejemplo, buscamos que sea dos veces derivable, podemos usar funciones polinomiales cúbicas. Para lograr esto, planteamos la continuidad de $s_n(x)$, $s'_n(x)$ y $s''_n(x)$ en los puntos x_k donde cambia la definición de $s_n(x)$:

$$\begin{aligned} f(x_0) &= s_n(x_0), \\ f(x_1) &= s_n(x_1^-) = s_n(x_1^+), \quad s'_n(x_1^-) = s'_n(x_1^+), \quad s''_n(x_1^-) = s''_n(x_1^+), \\ f(x_2) &= s_n(x_2^-) = s_n(x_2^+), \quad s'_n(x_2^-) = s'_n(x_2^+), \quad s''_n(x_2^-) = s''_n(x_2^+), \\ &\vdots \\ f(x_k) &= s_n(x_k^-) = s_n(x_k^+), \quad s'_n(x_k^-) = s'_n(x_k^+), \quad s''_n(x_k^-) = s''_n(x_k^+), \\ &\vdots \\ f(x_n) &= s_n(x_n). \end{aligned}$$

Como son n polinomios de cúbicos, el número de coeficientes indeterminados es $4n$. Por otro lado, de $s_n(x_k) = f(x_k)$ obtenemos $2n$ condiciones y de la continuidad de $s'_n(x)$ y $s''_n(x)$ resultan $2n-2$ condiciones más. Por lo tanto tenemos $4n-2$ condiciones y $4n$ coeficientes indeterminados, eso nos deja 2 condiciones libres. Existen distintas formas de elegir las, de acuerdo al objetivo buscado. Se puede considerar $s''_n(x_0) = s''_n(x_n) = 0$, conocidas como condiciones naturales. Por ejemplo, si f es periódica, buscamos que s_n también lo sea. Como $f(x_0) = f(x_n)$, se verifica $s_n(x_0) = s_n(x_n)$, entonces podemos tomar como condiciones adicionales: $s'_n(x_0) = s'_n(x_n)$ y $s''_n(x_0) = s''_n(x_n)$. Se puede probar que la solución de este sistema de ecuaciones siempre existe.

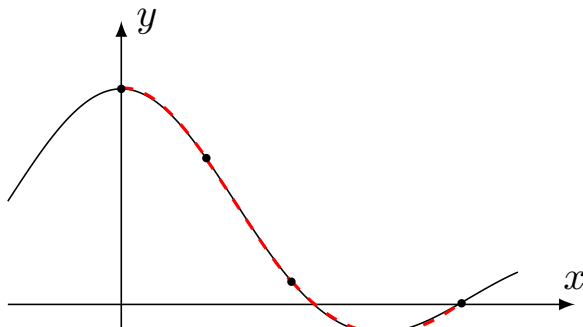


Fig. 1.13: Ajuste por segmentos cúbicos para $f(x) = 1.5e^{-x^2/2} + 0.4 \cos(\pi x)$ en $[0, 3]$.

1.6. Aplicación.

1.6.1. Temperatura ambiente. En el artículo [?], Hubert Frings y Mable Frings estudiaron la influencia de la temperatura sobre el número de chirridos por minuto de grillos (*neconocephalus ensiger*) machos. En la Tabla 1.3 se muestran los siguientes valores (Tabla 1 en [?]). En la Figura 1.14 se muestra el ajuste hecho con segmentos cúbicos.

T ($^{\circ}\text{C}$)	8	9	14	17	18	19	20.5	21.5	23	24	25	26
N (min^{-1})	264	285	346	417	438	495	524	540	643	693	744	780

Tabla 1.3: Número medio de chirridos/min. para individuos machos (n. ensiger).

1.6.2. Integración. Como aplicación de interpolación segmentada, podemos estudiar métodos de cuadratura, es decir cálculos aproximados del valor de la integral de f en el intervalo a a b , tomando la integral de la función aproximante. Si consideramos la aproximación lineal a trozos obtenemos

$$\begin{aligned} I &= \int_a^b f(x)dx \cong \int_a^b s_n(x)dx = \int_{x_0}^{x_1} s_n(x)dx + \cdots + \int_{x_{n-1}}^{x_n} s_n(x)dx \\ &= \frac{f(x_0) + f(x_1)}{2}(x_1 - x_0) + \cdots + \frac{f(x_{n-1}) + f(x_n)}{2}(x_n - x_{n-1}). \end{aligned}$$

Si suponemos $x_j - x_{j-1} = (b - a)/n$, nos queda el método de los trapecios

$$I \cong T_n = \frac{b-a}{2n}(f(x_0) + 2f(x_1) + \cdots + 2f(x_{n-1}) + f(x_n)).$$

Usando la acotación del error se obtiene

$$(1.7) \quad I - T_n = \frac{f''(\xi_1)}{2} \int_{x_0}^{x_1} (x - x_1)(x - x_0)dx + \cdots + \frac{f''(\xi_n)}{2} \int_{x_{n-1}}^{x_n} (x - x_n)(x - x_{n-1})dx,$$

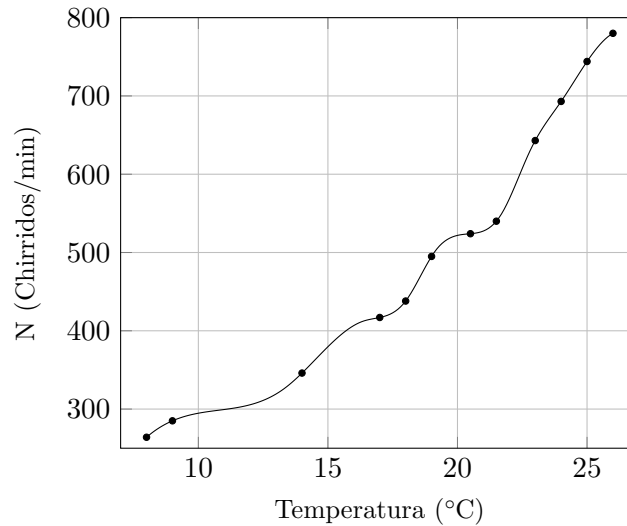


Fig. 1.14: Ajuste por segmentos cúbicos del número de chirridos/min en función de la temperatura.

de donde obtenemos

$$|I - T_n| \leq \frac{\max |f''(\xi)| (b-a)^3}{12 n^2}.$$

Ejemplo 1.9. Tomemos el problema de integrar $f(x) = e^{-x^2/2}$ en $[0, 3]$, con $I \cong 1.24993044474$

n	T_n	$ I - T_n $	$n^2(I - T_n)$
2	1.2453104484	0.46200×10^{-2}	1.8480×10^{-2}
4	1.2484545573	0.14759×10^{-2}	2.3614×10^{-2}
8	1.2495453664	0.38508×10^{-3}	2.4645×10^{-2}
16	1.2498331500	0.97295×10^{-4}	2.4907×10^{-2}
32	1.2499060568	0.24388×10^{-4}	2.4973×10^{-2}
64	1.2499243437	0.61010×10^{-5}	2.4990×10^{-2}
128	1.2499289192	0.15255×10^{-5}	2.4994×10^{-2}
256	1.2499300633	0.38140×10^{-6}	2.4995×10^{-2}

Observemos que $n^2(I - T_n)$ converge a una constante C , esto permite dos cosas importantes. La primera es una estimación del error, tengamos en cuenta no conocemos I , pero usando

$$I - T_n \cong \frac{C}{n^2},$$

$$I - T_{2n} \cong \frac{C}{4n^2},$$

podemos despejar $I - T_n \cong \frac{4}{3}(T_{2n} - T_n)$. Con esta estimación, podemos saber si el error está en valores aceptables, o si por el contrario, debemos refinar nuestra partición. Inclusive podemos hacerlo en algunos subintervalos, aquellos donde la función presente mayores dificultades (comportamiento oscilatorio, singularidades, etc.) Por otro lado, de las estimaciones anteriores podemos despejar $I \cong r_n = \frac{4}{3}T_{2n} - \frac{1}{3}T_n$. Este método se conoce como extrapolación de

Richardson. Para este ejemplo obtenemos

n	r_n	$ I - r_n $	$n^4 I - r_n $
2	1.24950259352	0.42785×10^{-3}	6.84562×10^{-3}
4	1.24990896941	0.21475×10^{-4}	5.49769×10^{-3}
8	1.24992907793	0.13668×10^{-5}	5.59845×10^{-3}
16	1.24993035902	0.85723×10^{-7}	5.61793×10^{-3}
32	1.24993043938	0.53620×10^{-8}	5.62245×10^{-3}
64	1.24993044441	0.33519×10^{-9}	5.62359×10^{-3}
128	1.24993044472	0.20949×10^{-10}	5.62418×10^{-3}

Se puede probar que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^2(I - T_n) = -\frac{(b-a)^2}{12} \int_a^b f''(x) dx.$$

En efecto, como

$$\int_{x_{j-1}}^{x_j} (x - x_j)(x - x_{j-1}) dx = \frac{(x_j - x_{j-1})^3}{6} = -\frac{(b-a)^2}{6n^2}(x_j - x_{j-1}),$$

usando (1.7) obtenemos

$$n^2(I - T_n) = -\frac{(b-a)^2}{12} (f''(\xi_1)(x_1 - x_0) + \cdots + f''(\xi_n)(x_n - x_{n-1})),$$

interpretando el lado derecho como una suma de Riemann, obtenemos el resultado. En el ejemplo anterior tenemos

$$-\frac{(b-a)^2}{12} \int_a^b f''(x) dx = \frac{3}{4} \int_0^3 e^{-x^2/2}(1-x^2) dx \cong 0.024995.$$

1.7. Ejercicios.

▣ **Ejercicio 1.1.** Dada la función $f(x) = \tanh(x)$.

- Mostrar las diferencias $f(x) - P_6(x)$ y $(f(x) - P_6(x))/x^7$, con $P_6(x) = x - x^3/3 + 2x^5/15$ polinomio de Talor de orden $n = 6$ en $x_0 = 0$.
- Repetir reemplazando $P_6(x)$ por la aproximación de Padé $P_{3,2}(x)$ dada por

$$P_{3,2}(x) = \frac{x + x^3/15}{1 + 2x^2/5}.$$

- Graficar las funciones $f(x)$, $P_6(x)$ y $P_{3,2}(x)$ en el intervalo $[-2, 2]$.

▣ **Ejercicio 1.2.** Calcular las diferencias divididas y el polinomio interpolador para $f(x)$ en los puntos x_0, \dots, x_n :

- $f(x) = \sqrt{x}$, $x_0 = 4.0$, $x_1 = 5.0$, $x_2 = 6.0$, $x_3 = 7.0$, $x_4 = 8.0$.
- $f(x) = e^{-x}$, $x_0 = 0.0$, $x_1 = 1.0$, $x_2 = 2.0$, $x_3 = 3.0$, $x_4 = 4.0$.

🔪 **Ejercicio 1.3*** Si $f(x)$ es una función infinitamente derivable, probar que son equivalentes las siguientes afirmaciones:

- I. $f(x)$ es un polinomio de grado n .
- II. $f[x_0, x_1, \dots, x_n]$ es constante para todo $x_0, x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$.
- III. $f[x_0, x_1, \dots, x_{n+1}] = 0$ para todo $x_0, x_1, \dots, x_{n+1} \in \mathbb{R}$.

▣ **Ejercicio 1.4.** Construir el polinomio interpolador en el intervalo $[8, 26]$, correspondiente a los datos de la Tabla 1.3. Graficar.

▣ **Ejercicio 1.5.** Graficar los polinomios de Lagrange en el intervalo $[-1, 1]$: $L_0(x), \dots, L_8(x)$, en los casos

- (a) $-1 = x_0 < \dots < x_8 = 1$ equidistantes ($x_j = j/4 - 1$).
- (b) x_j elegidos con el criterio de Chebyshev ($x_j = \cos((j + 1/2)\pi/9)$).
- (c) x_j elegidos al azar en el intervalo $[-1, 1]$.

✎ **Ejercicio 1.6*** Si $f(x)$ es una función infinitamente derivable,

$$f[x_0, x_0 + h, \dots, x_0 + kh] = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} + o(h)$$

✎ **Ejercicio 1.7.** Obtener la expresión de r_n como suma pesada de las evaluaciones de f , es decir $r_n = \beta_0 f(x_0) + \dots + \beta_{2n} f(x_{2n})$. Comparar con la regla de Simpson.

✎ **Ejercicio 1.8.** Calcular $\lim_{n \rightarrow \infty} n^4(I - r_n)$.