

## Práctica 8

### Series de Fourier

---

1. (\*\*)

a) Verificar que

$$f_n(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{n}} & \text{si } 0 \leq x \leq n \\ 0 & \text{si } x > n \end{cases}$$

converge uniformemente a cero en  $\mathbb{R}$  pero que  $(f_n)$  no converge a cero en media cuadrática.

b) Verificar que  $f_n(x) = \sqrt{2nxe^{-nx^2}}$  converge puntualmente a cero en  $[0,1]$  pero que  $(f_n)$  no converge en media cuadrática en  $[0, +\infty)$ .

c) Mostrar que la convergencia en media cuadrática no implica la convergencia puntual.

2. Encontrar los valores  $A_1$ ,  $A_2$  y  $A_3$  de modo que la función

$$y = A_1 \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}x\right) + A_2 \operatorname{sen}(\pi x) + A_3 \operatorname{sen}\left(\frac{3\pi}{2}x\right)$$

sea la mejor aproximación (en media cuadrática) de la función  $f(x) = 1$  en  $(0, 2)$ .

3. Sea  $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $F(a, b, c) = \int_{-\pi}^{\pi} (x^2 - a - b \cos x - c \operatorname{sen} x)^2 dx$ . Determinar el punto donde  $F$  alcanza su mínimo.

4. Sea  $f : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{C}$  integrable y tal que se extiende a  $\mathbb{R}$  con período  $2\pi$ . Sean  $c_n$  ( $n \in \mathbb{Z}$ ),  $a_n$  ( $n \in \mathbb{N}_0$ ) y  $b_n$  ( $n \in \mathbb{N}$ ) los coeficientes de su desarrollo de Fourier exponencial y trigonométrico, respectivamente.

a) Calcular  $c_n$  en función de  $a_n$  y  $b_n$  suponiendo que  $\bar{c}_n = c_{-n}$  y comprobar que esta relación se cumple cuando  $f(x) \in \mathbb{R}$  para todo  $x \in \mathbb{R}$ .

b) A partir del desarrollo en serie de Fourier de  $f(x)$  obtener el de  $f(-x)$ .

c) Si  $f_p(x)$  y  $f_i(x)$  son, respectivamente, las partes par e impar de  $f(x)$ , obtener sus desarrollos en serie de Fourier a partir del de  $f(x)$ .

5. a) Hallar la serie trigonométrica de Fourier de  $f : (-\pi, \pi) \rightarrow \mathbb{R}$  para:

(i)  $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 < x < \pi \\ -1 & \text{si } -\pi < x \leq 0 \end{cases}$

(ii)  $f(x) = x$

(iii)  $f(x) = x^2$

$$(iv) f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } -\pi < x < 0 \\ \text{sen } x & \text{si } 0 \leq x < \pi \end{cases}$$

b) Usando (iii), calcular las sumas de las series:

$$\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} \qquad \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2} \qquad \sum_{n \geq 0} \frac{1}{(2n+1)^2}$$

c) Integrando la serie de Fourier de  $f(x) = x^2$ ,  $x \in (-\pi, \pi)$ , y extendiendo  $f$  por periodicidad a  $\mathbb{R}$ , probar que:

$$(i) \sum_{n \geq 1} (-1)^n \frac{\text{sen}(nt)}{n^3} = \frac{1}{12} t(t^2 - \pi^2)$$

$$(ii) \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^6} = \frac{\pi^6}{945}$$

6. a) A partir del desarrollo en serie de Fourier exponencial de la función  $2\pi$ -periódica que coincide con  $e^x$  en  $(-\pi, \pi)$ , calcular la suma de la serie:

$$\sum_{n \geq 1} \frac{1}{1+n^2}$$

b) Obtener la serie de Fourier trigonométrica de la función dada en a), a partir del desarrollo en serie exponencial.

7. Si  $f(x) = |\text{sen } x|$ ,  $-\pi \leq x \leq \pi$ , probar que  $f(x)$  es la suma de su serie trigonométrica de Fourier en todo punto.

8. Sea  $f$  una función de período  $2\pi$  que en  $[-\pi, \pi]$  se define como  $f(x) = \cos(ax)$  ( $a \in \mathbb{R}$ ).

a) Desarrollar  $f$  en serie trigonométrica de Fourier y estudiar la convergencia puntual de la serie hacia la función.

b) Calcular la suma de la serie:  $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{(n^2 - b^2)^2}$ ,  $b \in \mathbb{R} - \mathbb{Z}$ .

9. Desarrollar en serie exponencial de Fourier  $f(x) = \text{sen } x$ ,  $0 \leq x \leq 1$ . A partir de este desarrollo, obtener la serie trigonométrica de  $f$ .

10. a) Obtener la serie exponencial de Fourier de  $f(x) = e^{\alpha e^{ix}}$ ,  $-\pi \leq x \leq \pi$ ,  $\alpha \in \mathbb{C}$ .

b) Probar que:  $\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{2\alpha \cos x} dx = \sum_{n \geq 0} \frac{\alpha^{2n}}{n!^2}$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}$ .

11. Si

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & -1 < x \leq 0 \\ 0 & 0 \leq x < 1 \\ \frac{1}{2} & x = 1 \end{cases} \quad \text{y} \quad f(x+2) = f(x) \quad \text{para todo } x \in \mathbb{R}$$

hallar la serie trigonométrica de Fourier asociada y probar que converge a  $f(x)$  para todo  $x$ .

- Sea  $f$  integrable en  $[-p, p]$  y tal que  $f(x + 2p) = f(x)$  para todo  $x \in \mathbb{R}$ .

a) Entonces,

- $\int_{a-p}^{a+p} f(t) dt = \int_{-p}^p f(t) dt$  para todo  $a \in \mathbb{R}$
- $\int_{2p}^{2p+x} f(t) dt = \int_0^x f(t) dt$  para todo  $a \in \mathbb{R}$

b) Si  $g(x) = \int_0^x f(t)dt$ , entonces:

$$g(x + 2p) = g(x) \iff \int_{-p}^p f(t) dt = 0$$

12. Probar que si  $f$  es integrable y  $2p$ -periódica:

$$\frac{1}{2p} \int_0^{2p} f(x)(p-x) dx = \sum_{n \geq 1} \frac{b_n}{nw_0}$$

donde  $b_n$  es un coeficiente de Fourier de  $f$  y  $w_0 = \frac{\pi}{p}$ .

*Sugerencia:* usar el resultado anterior e integración por partes.

13. Obtener las series de senos y cosenos de Fourier correspondientes a las siguientes funciones definidas en  $(0, \pi)$ :

a)  $f(x) = \cos x$                       b)  $f(x) = -x$                       c)  $f(x) = \begin{cases} 1 & 0 < x < \frac{\pi}{2} \\ 0 & \frac{\pi}{2} \leq x < \pi \end{cases}$

14. Calcular el desarrollo en serie de Fourier de senos de  $f$  y estudiar la convergencia puntual de la serie hallada para

a)  $f(x) = \begin{cases} 1 & 0 \leq x < \frac{\pi}{2} \\ \frac{1}{2} & x = \frac{\pi}{2} \\ 0 & \frac{\pi}{2} < x < \pi \end{cases}$

b)  $f(x) = x \quad (0 \leq x < \pi)$

15. Sea  $f$   $2p$ -periódica e integrable. Se define:

$$F(t) = \int_0^t f(x) dx - \frac{1}{2}at$$

donde  $a = \frac{1}{p} \int_{-p}^p f(x) dx$ . Demostrar que  $F$  es  $2p$ -periódica.

16. a) Probar que la serie  $\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \cos(nx)$  no es la serie de Fourier de ninguna función.  
 b) Calcular la  $n$ -ésima suma parcial de esta serie.

17. Sean  $f(x) = x$  en  $(-\pi, \pi)$   $2\pi$ -periódica y  $g(x) = 1$  en  $(-\pi, \pi)$ , también  $2\pi$ -periódica.

- ¿Qué relación hay entre  $f$  y  $g$ ?
- Calcular las series de Fourier de  $f$  y de  $g$ .
- Calcular la serie obtenida por diferenciación término a término de la serie de Fourier de  $f$ . ¿Es la serie de Fourier de  $g$ ? ¿Converge?

18. Dadas  $f(x) = \sin x$  y  $g(x) = \cos x$  en  $(0, \pi)$ , sean:

$$S(x) = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi} \sum_{n \geq 1} \frac{\cos(2nx)}{4n^2 - 1} \qquad T(x) = \frac{8}{\pi} \sum_{n \geq 1} \frac{n \cdot \sin(2nx)}{4n^2 - 1}$$

los desarrollos de Fourier en serie de cosenos y senos, respectivamente, de  $f$  y de  $g$ .

- ¿Se puede afirmar que  $f(x) = S(x)$  y que  $g(x) = T(x)$ ?
- ¿Es lícito obtener  $T(x)$  derivando término a término  $S(x)$ ?
- ¿Es lícito obtener  $S(x)$  derivando término a término  $T(x)$ ?

*Sugerencia:* graficar las extensiones de  $f$  y de  $g$  a  $\mathbb{R}$ .

19. Sea  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$   $2\pi$ -periódica dada por:

$$g(x) = \begin{cases} -\pi - x & -\pi \leq x < -\frac{\pi}{2} \\ x & -\frac{\pi}{2} \leq x < \frac{\pi}{2} \\ \pi - x & \frac{\pi}{2} \leq x < \pi \end{cases}$$

Sea  $f(x) = \sum_{n \geq 1} b_n \sin((2n + 1)x)$  convergente para todo  $x \in \mathbb{R}$ . Probar que si  $f(x) = g(x)$  para todo  $x \in (0, \pi)$ , entonces  $f = g$ .

20. Sean  $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $2\pi$ -periódicas, dadas por:

$$f(x) = x \text{ en } [0, 2\pi) \qquad \text{y} \qquad g(x) = x \text{ en } [-\pi, \pi)$$

- Calcular los desarrollos en serie trigonométrica de Fourier de  $f$  y de  $g$  y estudiar la convergencia puntual de dichas series.
- Determinar la función  $h(x)$  sabiendo que es la suma de la serie

$$\pi - 4 \sum_{n \geq 0} \frac{\sin((2n + 1)x)}{2n + 1}$$

y comprobar el resultado calculando los coeficientes de Fourier de  $h$ .

21. Desarrollar  $\sin^5 t$  en serie trigonométrica de Fourier sin calcular expresamente los coeficientes.

*Sugerencia:* escribir el seno en términos de la exponencial y usar el binomio de Newton.

22. Desarrollar en serie de Fourier las funciones:

$$f(t) = e^{r \cos t} \cos(r \operatorname{sen} t) \quad g(t) = e^{r \cos t} \operatorname{sen}(r \operatorname{sen} t) \quad h(t) = \frac{1}{1 - re^{it}} \quad 0 < r < 1.$$

### Separación de variables

23. Hallar los autovalores y las autofunciones de los siguientes problemas:

a)  $u'' + \lambda u = 0$ , para  $0 < x < \pi$  y con las siguientes condiciones de contorno:

i)  $u(0) = u(\pi) = 0$

ii)  $u'(0) = u'(\pi) = 0$

iii)  $u(0) = u'(\pi) = 0$

b)  $u'' + \lambda u = 0$ ,  $-\pi < x < \pi$ ,  $u(-\pi) = u(\pi)$  y  $u'(-\pi) = u'(\pi)$

24. Usando separación de variables resolver:

a)  $\frac{\partial u}{\partial x} - 4 \frac{\partial u}{\partial y} = 0$ ,  $u(0, y) = 8e^{-3y}$ .

b)  $\frac{\partial u}{\partial t} - 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$ ,  $0 < x < 1$ ,  $t > 0$ .

$$u(0, t) = u(1, t) = 0, \quad |u(x, t)| < M, \quad u(x, 0) = 5 \operatorname{sen}(4\pi x) - 3 \operatorname{sen}(8\pi x) + 2 \operatorname{sen}(10\pi x).$$

c)  $\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$ ,  $\frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = 0$ ,  $u(2, t) = 0$ ,

$$u(x, 0) = 8 \cos\left(\frac{3\pi x}{4}\right) - 6 \cos\left(\frac{9\pi x}{4}\right).$$

d)  $\frac{\partial u}{\partial t} - \kappa \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$   $0 < x < \pi$ ,  $t > 0$ .

$$u(x, 0) = x(\pi - x), \quad u(0, t) = u(\pi, t) = 0,$$

donde  $\kappa$  es una constante positiva.