Práctica 3
Derivabilidad - Ecuaciones de Cauchy-Riemann

---

1. Calcular la función derivada de las siguientes funciones:

   a) $f(z) = z$ **b)** $f(z) = z^2$ **c)** $f(z) = \dfrac{1}{z}$

2. Sea $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ derivable en $z_0 \in \mathbb{C}$, $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$.

   a) Calcular:
   $$\lim_{\substack{h\to 0\\ h\in\mathbb{R}}} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h} \quad ; \quad \lim_{\substack{h\to 0\\ h\in\mathbb{R}}} \frac{f(z_0 + ih) - f(z_0)}{ih}$$
   en términos de u y de v. ¿Qué se deduce?

   b) Suponiendo que u y v son de clase C^2, calcular $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ y $\dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 v}{\partial y^2}$ en z_0.

   c) Calcular $f'(z_0)$ en términos de u y de v.

3. Sea $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$, $f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$ derivable en $z_0 = x_0 + iy_0$ y sea $g(x, y) = (u(x, y), v(x, y))$.

   a) Probar que g es diferenciable en (x_0, y_0).

   b) Calcular $|f'(z_0)|$ y el jacobiano de $Dg(x_0, y_0)$ en términos de u y de v.

   c) ¿Es cierto que si f es abierta g también lo es? ¿Y el recíproco?

4. Sea $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ derivable en $z_0 \in \mathbb{C}$. Probar que existe $\alpha : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$, $\mathbb{C}-$lineal , tal que
   $$\lim_{h\to 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0) - \alpha(h)}{h} = 0$$

- **Regla de L'Hospital**

  Sean f, g funciones holomorfas en z_0 tales que $f(z_0) = g(z_0) = 0$ y $g'(z_0) \neq 0$. Entonces:
  $$\lim_{z\to z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \frac{f'(z_0)}{g'(z_0)}$$

5. Calcular:

a) $\lim_{z\to i} \dfrac{z^{10}+1}{z^6+1}$

b) $\lim_{z\to 2i} \dfrac{z^2+4}{2z^2+(3-4i)z-6i}$

c) $\lim_{z\to e^{\frac{\pi i}{3}}} \dfrac{z-e^{\frac{\pi i}{3}}}{z^3+1}$

d) $\lim_{z\to i} \dfrac{z^2-2iz+1}{z^4+2z^2+1}$

6. Sea $\gamma : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$. Dar condiciones necesarias y suficientes sobre sus partes real e imaginaria de modo que resulte derivable en $a \in \mathbb{R}$ y calcular $\gamma'(a)$. Calcular $\gamma'(t)$ para $\gamma(t) = \cos t + i \operatorname{sen} t$.

7. Sean $f, g : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ dadas por

$$f(x,y) = \sqrt{|xy|} \qquad\qquad g(x+iy) = \begin{cases} \dfrac{x^3-y^3+i(x^3+y^3)}{x^2+y^2} & x+iy \neq 0, \\ 0 & x+iy = 0. \end{cases}$$

Demostrar que f, g son continuas en 0 y que cumplen las condiciones de Cauchy-Riemann pero no son derivables.

8. Sea $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ la función dada por

$$f(x+iy) = \begin{cases} \dfrac{x^3y+i(x^2y^2)}{x^4+y^2} & x+iy \neq 0, \\ 0 & x+iy = 0. \end{cases}$$

a) Verificar que se cumplen las condiciones de Cauchy-Riemann en el $(0,0)$.

b) Probar que f es derivable a lo largo de cualquier recta que pasa por $(0,0)$, y que todas esas derivadas coinciden en el origen.

c) Probar que f no es derivable en $z = 0$.

9. **a)** Mostrar que las condiciones de Cauchy-Riemann en coordenadas polares se escriben:

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta} \qquad\qquad \frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta}$$

b) Verificar que en coordenadas polares se tiene

$$f' = e^{-i\theta}\Big(\frac{\partial u}{\partial r} + i\frac{\partial v}{\partial r}\Big) = \frac{e^{-i\theta}}{r}\Big(\frac{\partial v}{\partial \theta} - i\frac{\partial u}{\partial \theta}\Big).$$

c) Calcular la derivada de $f(z) = z^{\frac{m}{n}} = r^{\frac{m}{n}}(\cos\frac{m\theta}{n} + i \operatorname{sen}\frac{m\theta}{n})$

10. Determinar los puntos donde f es derivable y donde es holomorfa.

a) $f(z) = \begin{cases} \dfrac{x+iy}{x^2+y^2} & z \neq 0, \\ 0 & z = 0. \end{cases}$

b) $f(z) = \overline{z}$

c) $f(z) = x^2 + iy^2$

d) $f(z) = x^2 - y^2 - 2xy + i(x^2 - y^2 + 2xy)$

11. Determinar si las siguientes funciones son holomorfas en los conjuntos especificados y, en caso de no serlo, encontrar un conjunto abierto en el que la función sea holomorfa o bien demostrar que no es holomorfa en ninguna parte.

a) $f(z) = \dfrac{3+2z}{i+2z}$ en $D : |z| < 1$

b) $f(z) = \cos x$ en $D : |z| < 1$

c) $f(z) = e^{-y}(\cos x + i \operatorname{sen} x)$ en $\mathbb{C}$

d) $f(z) = \dfrac{P(z)}{Q(z)}$ en $\mathbb{C}$ (P , Q polinomios)

e) $f(z) = \dfrac{P(z) \cdot Q(z)}{z}$ en $D : 0 < |z| < 1$ (P , Q polinomios)

12. Analizar dónde son holomorfas las siguientes funciones y hallar $f'(z)$ en cada caso.

a) $f(z) = z^3 - 2z$

b) $f(z) = \dfrac{z+1}{1-z}$

c) $f(z) = z^2 \cdot \overline{z}$

d) $f(z) = x^2 + iy^3$

e) $f(z) = e^x(\cos y + i \operatorname{sen} y)$

13. Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ abierto y conexo. Probar:

a) Si f y $\overline{f}$ son holomorfas en Ω, entonces f es constante.

b) Si f es holomorfa en Ω y $f' = 0$ en Ω, entonces f es constante en Ω.

c) Si f y g son holomorfas en Ω y $f' = g'$ en Ω, entonces $f - g$ es constante en Ω.

¿Es necesaria la hipótesis de conexión?

14. Sea $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ holomorfa. Probar:

a) $\operatorname{Re}(f)$ constante $\Rightarrow$ f constante.

b) $\operatorname{Im}(f)$ constante $\Rightarrow$ f constante.

c) $|f|$ constante $\Rightarrow$ f constante.

d) $\operatorname{Arg}(f)$ constante $\Rightarrow$ f constante.

Piense en cómo generalizar estos resultados en un solo enunciado y trate de probarlo en el siguiente contexto. Si $G : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ es una función C^1, decimos que la curva determinada en el plano complejo sus ceros mediante:

$$\mathfrak{C} = \{z = x + iy \in \mathbb{C} : G(x, y) = 0\}$$

es regular si $\nabla(G)(x, y) \neq 0$ para todo punto $(x, y) \in \mathfrak{C}$. Deduzca qué propiedad debería tener una función holomorfa definida en un abiero conexo Ω de $\mathbb{C}$ si su imagen está contenida en la curva $\mathfrak{C}$.

15. Sea $u(x, y) = e^{-x}(x \operatorname{sen} y - y \cos y)$.

    a) Probar que u es armónica.

    b) Encontrar v tal que $f = u + iv$ sea holomorfa.

    c) Hacer lo mismo para $u(x, y) = 2x(1 - y)$

16. Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ abierto, y sea $u : \Omega \to \mathbb{R}$. Decimos que $v : \Omega \to \mathbb{R}$ es conjugada armónica de u (en Ω) si $f = u + iv$ es holomorfa en Ω.

    a) Probar que si v y $\widetilde{v}$ son conjugadas armónicas de u en Ω, entonces v y $\widetilde{v}$ difieren en una constante aditiva. ¿Falta alguna hipótesis?

    b) Probar que si u y v son mutuamente conjugadas armónicas, entonces son constantes. ¿Falta alguna hipótesis?

17. **a)** Hallar todas las funciones holomorfas de $\mathbb{C}$ en $\mathbb{C}$ tales que su parte real es $x^2 - y^2$.

    b) Hallar el polinomio armónico más general entre los de la forma:

    $$ax^3 + bx^2y + cxy^2 + dy^3$$

    Encontrar además la función armónica conjugada y la correspondiente función holomorfa.

    c) Encontrar una función f holomorfa en todo el plano complejo cuya parte real sea $e^x(x \cos y - y \operatorname{sen} y)$.

    d) Mostrar que $f(x, y) = \dfrac{x}{x^2 + y^2}$ es armónica. Indicar su dominio de armonicidad y hallar una función holomorfa que tenga a f como parte imaginaria.

    e) Dada $F : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ de clase C^2 se sabe que $u : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $u(x, y) = F(xy)$ es armónica en $\mathbb{R}^2$. ¿Cómo debe ser F?

18. Demostrar que si f es holomorfa en un abierto conexo $\Omega \subset \mathbb{C}$ y $f(z) \cdot \overline{f(z)} \neq 0$ para todo $z \in \Omega$, entonces $g(z) = \log |f(z)|$ es armónica en Ω. Deduzca que, sin embargo, si $\Omega = \mathbb{C} - \{0\}$ y $f(z) = z$, la función g correspondiente no tiene conjugada armonica ¿ En qué tipo de conjuntos la función g sí admitiría una conjugada armónica? ¿ Cuales serían tales conjugadas?