

**MATEMÁTICA 2 - Segundo Cuatrimestre 2019**  
**Práctica 3 - Transformaciones lineales**

1. Determinar cuáles de las siguientes funciones son transformaciones lineales:

a)  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $f(x_1, x_2) = (x_1 - x_2, 2x_2, 1 + x_1)$

b)  $f : \mathbb{R}^{2 \times 2} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$

c)  $f : \mathbb{R}^{2 \times 2} \rightarrow \mathbb{R}^{2 \times 3}$ ,  $f \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{22} & 0 & a_{12} + a_{21} \\ 0 & a_{11} & a_{22} - a_{11} \end{pmatrix}$

d)  $f : \mathbb{R}[X] \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $f(p) = (p(0), p'(0), p''(0))$

2. Interpretar geoméricamente las siguientes transformaciones lineales  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ .

a)  $f(x, y) = (x, 0)$

b)  $f(x, y) = (x, -y)$

c)  $f(x, y) = (x \cos t - y \sin t, x \sin t + y \cos t)$ , con  $t \in \mathbb{R}$  fijo.

3. Probar que las siguientes funciones son transformaciones lineales:

a)  $\text{tr} : K^{n \times n} \rightarrow K$ ,  $\text{tr}(A) = \sum_{i=1}^n A_{ii}$

b)  $f : K^{n \times m} \rightarrow K^{r \times m}$ ,  $f(A) = BA$  donde  $B \in K^{r \times n}$  está dado

c)  $\delta : C^\infty(\mathbb{R}) \rightarrow C^\infty(\mathbb{R})$ ,  $\delta(f) = f'$

d)  $\Phi : \mathcal{C}([0, 1]) \rightarrow \mathcal{C}([0, 1])$ ,  $\Phi(f)(x) = \int_0^x f(t) dt$

e)  $\epsilon_\alpha : K[X] \rightarrow K$ ,  $\epsilon_\alpha(f) = f(\alpha)$ , donde  $\alpha \in K$

4. a) Mostrar que existe una transformación lineal  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  tal que  $f(1, 1) = (-5, 3)$  y  $f(-1, 1) = (5, 2)$ , y que es única. Para dicha  $f$ , determinar  $f(5, 3)$  y  $f(-1, 2)$ .

b) ¿Existe una transformación lineal  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  tal que  $f(1, 1) = (2, 6)$ ;  $f(-1, 1) = (2, 1)$  y  $f(2, 7) = (5, 3)$ ?

c) Sean  $f, g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  transformaciones lineales tales que

$$\begin{aligned} f(1, 0, 1) &= (1, 2, 1), & f(2, 1, 0) &= (2, 1, 0), & f(-1, 0, 0) &= (1, 2, 1), \\ g(1, 1, 1) &= (1, 1, 0), & g(3, 2, 1) &= (0, 0, 1), & g(2, 2, -1) &= (3, -1, 2). \end{aligned}$$

Determinar si  $f = g$ .

d) Hallar todos los  $a \in \mathbb{R}$  para los cuales exista una transformación lineal  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  que satisfaga que  $f(1, -1, 1) = (2, a, -1)$ ,  $f(1, -1, 2) = (a^2, -1, 1)$  y  $f(1, -1, -2) = (5, -1, -7)$ .

5. a) Calcular el núcleo y la imagen de cada una de las transformaciones lineales de los ejercicios 1 y 2. Decidir, en cada caso, si  $f$  es epimorfismo, monomorfismo o isomorfismo. En el caso que sea isomorfismo, calcular  $f^{-1}$ .

b) Clasificar las transformaciones lineales  $\text{tr}$  y  $\epsilon_\alpha$  del Ejercicio 2 en epimorfismos, monomorfismos e isomorfismos.

6. Sea  $f : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$  la transformación lineal dada por

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 + x_2 + x_3 + x_4, x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 4x_4, 2x_1 + x_3 - x_4)$$

Calcular  $\text{Nu}(f)$  e  $\text{Im}(f)$ , y determinar el conjunto  $\{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 : f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (2, 0, 6)\}$ .

7. Sea  $S = \langle (1, 1, 0, 1), (2, 1, 0, 1) \rangle \subseteq \mathbb{R}^4$ . Hallar una transformación lineal  $f : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^2$  tal que  $\text{Nu}(f) = S$ .
8. a) ¿Existe  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^4$  epimorfismo? ¿Y un epimorfismo  $f : \mathbb{R}^{2 \times 2} \rightarrow \mathbb{R}_4[X]$ ?  
 ¿Existe  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$  monomorfismo?  
 ¿Y un monomorfismo  $f : \{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : \text{tr}(A) = 0\} \rightarrow \{g \in \mathbb{R}_3[X] : g(1) = g'(1) = 0\}$ ?
- b) ¿Existe alguna t.l.  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^4$  tal que  $\{(1, 1, 0, 0), (1, 1, 1, 0), (1, 1, 1, 1)\} \subset \text{Im}(f)$ ?
- c) ¿Existe algún isomorfismo  $f : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$  tal que  $f(S) = T$ , donde  $S = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 / x_1 + x_2 + x_3 = 0\}$  y  $T = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 / 2x_1 + x_4 = 0, x_2 - x_3 = 0\}$ ?
9. Determinar si existe (y en caso afirmativo hallar) una t.l.  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  que satisfice  $\text{Nu}(f) = S$  e  $\text{Im}(f) = T$  en los siguientes casos:
- a)  $S = \langle (1, 2, 1) \rangle$ ,  $T = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) / x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = 0\}$ ,
- b)  $S = \langle (1, -2, 1) \rangle$ ,  $T = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) / x_1 + x_2 = 0, x_3 + x_4 = 0\}$ .
10. En cada uno de los siguientes casos definir una t.l.  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  que satisfaga lo pedido
- a)  $(1, 1, 0) \in \text{Nu}(f)$  y  $\dim(\text{Im}(f)) = 1$ .
- b)  $\text{Nu}(f) \cap \text{Im}(f) = \langle (1, 1, 2) \rangle$ .
- c)  $\text{Nu}(f) \neq \{0\}$ ,  $\text{Im}(f) \neq \{0\}$  y  $\text{Nu}(f) \cap \text{Im}(f) = \{0\}$ .
- d)  $f \neq 0$  y  $\text{Nu}(f) \subseteq \text{Im}(f)$ .
11. Calcular el rango de las matrices

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 7 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -k & -1 \\ -1 & 1 & k^2 \\ 1 & k & k-2 \end{pmatrix} \text{ para cada } k \in \mathbb{R} \text{ y } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

12. Sean  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$ ,  $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2, x_1 + x_3, 0, 0)$  y  $g : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $g(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 - x_2, 2x_1 - x_2)$ . Determinar el núcleo y la imagen de  $f$ , de  $g$  y de  $g \circ f$ , y decidir si son monomorfismos, epimorfismos o isomorfismos.
13. En cada uno de los siguientes casos definir una t.l.  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  que satisfaga lo pedido
- a)  $f \neq 0$  y  $f \circ f = 0$ . b)  $f \neq \text{Id}$  y  $f \circ f = \text{Id}$ .
14. a) Para  $t = \pi$  en el Ejercicio 2.c), calcular  $f^2$ .  
 b) Hallar  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $f \neq \text{Id}$ , tal que  $f^3 = \text{Id}$ .  
 c) Hallar  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ,  $A \neq \text{Id}$ , tal que  $A^3 = \text{Id}$ . ¿Y en  $\mathbb{R}^{3 \times 3}$ ?
15. Sea  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  la transformación lineal definida por

$$f(x_1, x_2, x_3) = (x_2, -x_2 + 2x_3, x_1 - x_2, x_1 - x_2)$$

y sean las bases  $\mathcal{B} = \{(1, 1, 1), (1, 1, 0), (1, 0, 0)\} \subset \mathbb{R}^3$  y  $\mathcal{B}' = \{(1, 1, 0, 0), (1, -1, 0, 0), (0, 0, 1, 1), (0, 0, 1, -1)\} \subset \mathbb{R}^4$ .

- a) Calcular  $[f]_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}$ .  
 b) Calcular  $\text{Nu}(f)$  e  $\text{Im}(f)$ .

- c) Calcular las matrices inversibles  $Q \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$  y  $P \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$  tales que  $[f]_{\mathcal{B}\mathcal{B}'} = Q[f]_{\mathcal{E}\mathcal{E}'}P$  donde  $\mathcal{E}$  y  $\mathcal{E}'$  son las bases canónicas de  $\mathbb{R}^3$  y  $\mathbb{R}^4$  respectivamente. ¿Cuáles son?

16. Sea  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  definida por

$$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2 - x_3, 2x_1 - 3x_2 + 2x_3, 3x_1 - 2x_2 + x_3).$$

- a) Determinar bases  $\mathcal{B}$  y  $\mathcal{B}'$  de  $\mathbb{R}^3$  tales que  $[f]_{\mathcal{B}\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

b) Si  $A$  es la matriz de  $f$  en la base canónica, calcular su rango y encontrar matrices inversibles

$$Q \text{ y } P \text{ tales que } QAP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- c) ¿Existe una base  $\mathcal{B}''$  de  $\mathbb{R}^3$  para la cual  $[f]_{\mathcal{B}''} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ?

17. Sean  $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$  una base de  $\mathbb{R}^3$  y  $\mathcal{B}' = \{w_1, w_2, w_3, w_4\}$  una base de  $\mathbb{R}^4$ . Sea  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  la transformación lineal tal que

$$[f]_{\mathcal{B}\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 4 \\ 3 & -2 & 5 \end{pmatrix}$$

a) Hallar  $f(3v_1 + 2v_2 - v_3)$ . ¿Cuáles son sus coordenadas en la base  $\mathcal{B}'$ ?

b) Hallar una base de  $\text{Nu}(f)$  y una base de  $\text{Im}(f)$ .

c) Describir el conjunto  $\{v \in \mathbb{R}^3 : f(v) = w_1 - 3w_3 - w_4\}$ .

18. Dada  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  dada por

$$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + 2x_2 + 2x_3, 2x_1 + x_2 + 2x_3, 2x_1 + 2x_2 + x_3),$$

a) Calcular  $[f]_{\mathcal{B}}$  con  $\mathcal{B} = \{(-1, 1, 0), (-1, 0, 1), (1, 1, 1)\}$ .

b) Verificar que  $f$  es un isomorfismo.

c) Exhibir una matriz inversible  $P \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$  tal que  $[f]_{\mathcal{B}} = P^{-1}[f]_{\mathcal{E}}P$ . ¿Cuál es?

19. Para las siguientes  $f : V \rightarrow V$ , calcular  $[f]_{\mathcal{E}}$ , donde  $\mathcal{E}$  es la base canónica

a)  $V = \mathbb{R}_4[X]$ ,  $f(P) = P'$ ,  $\mathcal{E} = \{1, X, X^2, X^3, X^4\}$ .

b)  $V = \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ,  $f(A) = A^t$ ,  $\mathcal{E} = \{E^{11}, E^{12}, E^{21}, E^{22}\}$ .

20. Sea  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  dada por  $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1, x_1 + 2x_2 - x_3, 2x_1 + 2x_2 - x_3)$ . Probar que  $f$  es

un proyector (i.e.  $f \circ f = f$ ) y encontrar una base  $\mathcal{B}$  de  $\mathbb{R}^3$  en la cual  $[f]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

21. En cada uno de los siguientes casos construir, si es posible, un proyector  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  que cumpla lo pedido

a)  $\text{Nu}(f) = \{(x_1, x_2, x_3) / x_1 + x_2 + x_3 = 0\}$  e  $\text{Im}(f) = \langle (-2, 1, 1) \rangle$

b)  $\text{Nu}(f) = \{(x_1, x_2, x_3) / 3x_1 - x_3 = 0\}$  e  $\text{Im}(f) = \langle (1, 1, 1) \rangle$

y en caso que sea posible encontrar una base  $\mathcal{B}$  de  $\mathbb{R}^3$  tal que  $[f]_{\mathcal{B}}$  sea una matriz diagonal con solo 1 o 0 en la diagonal.