

MATEMATICA 2 - 2do cuatrimestre 2019**Práctica 7 - Forma de Jordan**

En lo que sigue se nota con $m_A(\lambda)$ el polinomio minimal de una matriz A .

1. Utilizando el Teorema de Hamilton-Cayley:

(a) Calcular A^{1000} para $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

(b) Dada $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$, expresar A^{-1} como combinación lineal de A y de I_2 .

2. Utilizando el Teorema de Hamilton-Cayley:

i) Calcular $A^4 - 4A^3 - A^2 + 2A - 5I_2$ para $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.

ii) Calcular A^{1000} para $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

iii) Calcular $\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^n \forall n \in \mathbb{N}$.

iv) Dada $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$, expresar A^{-1} como combinación lineal de A y de I_2 .

v) Probar que en general, si A es invertible $n \times n$, puede utilizarse el teorema de Hamilton-Cayley para escribir A^{-1} como un polinomio en A de grado $n - 1$.

3. Calcular el polinomio característico y el polinomio minimal de las matrices siguientes:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -3 & -3 & 3 \\ -2 & -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

4. Determinar la forma y una base de Jordan de las siguientes matrices:

$$\begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -3 & -3 & 3 \\ -2 & -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

5. (a) Sea $A \in \mathbb{C}^{6 \times 6}$ tal que $m_A(\lambda) = \lambda^3$. Determinar las posibles formas de Jordan de A .

(b) Sea $A \in \mathbb{C}^{8 \times 8}$ nilpotente tal que $\text{rg}(A) = 6$. ¿Cuántos bloques tiene la forma de Jordan de A ? ¿Y si $A \in \mathbb{C}^{16 \times 16}$ con $\text{rg}(A) = 9$?

6. Decidir si existe (y en caso afirmativo exhibir)

(a) $A \in \mathbb{C}^{8 \times 8}$ tal que $\text{rg}(A) = 5$, $\text{rg}(A^2) = 3$, $\text{rg}(A^3) = 2$, $\text{rg}(A^4) = 1$ y $\text{rg}(A^5) = 0$.

(b) $A \in \mathbb{C}^{8 \times 8}$ tal que $\text{rg}(A) = 6$, $\text{rg}(A^2) = 4$, $\text{rg}(A^3) = 3$, $\text{rg}(A^4) = 1$ y $\text{rg}(A^5) = 0$.

(c) $A \in \mathbb{C}^{16 \times 16}$ tal que $\text{rg}(A) = 9$, $\text{rg}(A^2) = 5$, $\text{rg}(A^3) = 3$, $\text{rg}(A^4) = 1$ y $\text{rg}(A^5) = 0$.

7. Hallar la forma y una base de Jordan para cada una de las matrices siguientes

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

8. Sea $A \in \mathbb{C}^{6 \times 6}$ tal que $m_A(\lambda) = \lambda^6$, y sea $(v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6)$ una base de Jordan para A . Calcular la forma y una base de Jordan para las matrices A^2 , A^3 , A^4 y A^5 .

9. Sea $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Determinar la forma y una base de Jordan de A .