“Ejercicio de las Eliminatorias”

Martes 11 de Septiembre

1 Problema

1.1 Motivación

En las Eliminatorias Sudamericanas hay 10 selecciones que juegan todas contra todas entre sí 2 veces (*double-round robin*). Finalizado el torneo, las primeras 4 selecciones clasifican directamente al Mundial (y la quinta accede al repechaje).

La motivación es encontrar la mayor cantidad puntos que uno puede obtener en un torneo de estas características con los que todavía existe la posibildiad de quedar eliminado o no clasificar (es decir, si uno quisiera garantizar la clasificación debería sacar al menos un punto más que la cantidad de puntos encontrada). Esto nos lleva a formular el siguiente problema.

1.2 Enunciado formal

Dado un torneo de n equipos donde juegan todos contra todos entre sí r veces, encontrar **la mayor cantidad de puntos** que un equipo puede obtener y quedar en una posición menor o igual a k al finalizar el torneo.

También nos va a interesar estudiar el mismo problema pero con **la menor cantidad de puntos** que podemos obtener y aún así obtener la posición k al finalizar el torneo.

1.3 Ejemplos

- **Eliminatoria Sudamericana**: Si buscamos la *mayor* cantidad de puntos para asegurarnos clasificar directamente, debemos resolver el problema con $\boxed{n = 10, r = 2, k = 5}$ (Para garantizarnos la clasificación necesitamos al menos un punto más que la respuesta obtenida)

- **Eliminatoria Sudamericana**: Si buscamos la *menor* cantidad de puntos tal que existe una secuencia de resultados con la que podemos clasificar, debemos resolver el problema con $\boxed{n = 10, r = 2, k = 4}$

- **Grupo de un Mundial**: Si buscamos la *mayor* cantidad de puntos para asegurarnos clasificar, debemos resolver el problema con $\boxed{n = 4, r = 1, k = 3}$ (Para garantizarnos la clasificación necesitamos al menos un punto más que la respuesta obtenida)

- **Grupo de un Mundial**: Si buscamos la *menor* cantidad de puntos tal que existe una secuencia de resultados con la que podemos clasificar, debemos resolver el problema con $\boxed{n = 4, r = 1, k = 2}$

2 Modelado del Problema

Como muchas veces ocurre, existen más de una forma de modelar el problema. Veamos dos de ellas, para luego analizar qué ventajas y desventajas tiene cada una de ellas.

2.1 Modelo 1 (maximizando la cantidad de puntos)

Para este modelo vamos a utilizar tres tipos de variables. x_{ij} una variable entera que indica la cantidad de veces que el equipo i le ganó al equipo j a lo largo del torneo. También tendremos una variable auxiliar entera P_i que tomará como valor el puntaje del equipo i al finalizar el torneo, y nos permitirá escribirlo de forma (relativamente) compacta. Además tendremos una variable binaria $I_i = 1 \iff P_i \geq P_1$

$$
\begin{array}{llcll}
\max & P_1 & & & \\
\text{s.a}: & \sum_{i=2}^{n} I_i & \geq & k-1 & \\
 & \sum_{j \neq i} (3x_{ij} + (r - x_{ij} - x_{ji})) = & & P_i & \forall i \in \{1, \ldots, n\} \\
0 \leq & x_{ij} & \leq & r & \forall (i,j) \in \{1, \ldots, n\}^2 \\
 & x_{ij} + x_{ji} & \leq & r & \forall (i,j) \in \{1, \ldots, n\}^2 \\
 & P_i & \geq & P_1 - M \cdot (1 - I_i) & \forall i \in \{1, \ldots, n\} \\
 & P_i & \leq & P_1 + M \cdot I_i - 1 & \forall i \in \{1, \ldots, n\}
\end{array}
$$

2.2 Modelo 2 (maximizando la cantidad de puntos)

Con las mismas variables (en realidad no vamos a usar las I_i), podemos formularlo de la siguiente forma. La idea que ronda detrás de este modelo es que como los equipos son indistinguibles podemos fijar el orden en el que aparecen.

$$
\begin{array}{llcll}
\max & P_k & & & \\
\text{s.a}: & P_i & \geq & P_{i+1} & \forall i \in \{1, \ldots, n-1\} \\
 & \sum_{j \neq i} (3x_{ij} + (r - x_{ij} - x_{ji})) = & & P_i & \forall i \in \{1, \ldots, n\} \\
0 \leq & x_{ij} & \leq & r & \forall (i,j) \in \{1, \ldots, n\}^2 \\
 & x_{ij} + x_{ji} & \leq & r & \forall (i,j) \in \{1, \ldots, n\}^2
\end{array}
$$

2.3 Modelo 1 (minimizando la cantidad de puntos)

Al formular el modelo en este caso, las variables binarias I_i cambian su significado, y las utilizaremos para modelar $I_i = 1 \iff P_i > P_1 \iff P_i \geq P_1 + 1$ (porque los puntajes son enteros)

$$
\begin{array}{llcll}
\min & P_1 & & & \\
\text{s.a}: & \sum_{i=2}^{n} I_i & \leq & k-1 & \\
 & \sum_{j \neq i} (3x_{ij} + (r - x_{ij} - x_{ji})) = & & P_i & \forall i \in \{1, \ldots, n\} \\
0 \leq & x_{ij} & \leq & r & \forall (i,j) \in \{1, \ldots, n\}^2 \\
 & x_{ij} + x_{ji} & \leq & r & \forall (i,j) \in \{1, \ldots, n\}^2 \\
 & P_i & \geq & P_1 - M \cdot (1 - I_i) + 1 & \forall i \in \{1, \ldots, n\} \\
 & P_i & \leq & P_1 + M \cdot I_i & \forall i \in \{1, \ldots, n\}
\end{array}
$$

2.4 Modelo 2 (minimizando la cantidad de puntos)

$$
\begin{array}{llcll}
\min & P_k & & & \\
\text{s.a :} & P_i & \geq & P_{i+1} & \forall i \in \{1, \ldots, n-1\} \\
& \sum\limits_{j \neq i} (3x_{ij} + (r - x_{ij} - x_{ji})) & = & P_i & \forall i \in \{1, \ldots, n\} \\
0 \leq & x_{ij} & \leq & r & \forall (i,j) \in \{1, \ldots, n\}^2 \\
& x_{ij} + x_{ji} & \leq & r & \forall (i,j) \in \{1, \ldots, n\}^2
\end{array}
$$