[1936e] La théorie des enveloppes en Mathématiques Spéciales

La théorie des enveloppes fait l'objet d'une leçon de Mathématiques Spéciales, qui n'est pas seulement, comme on sait, l'effroi des candidats a l'agrégation, mais pour les élèves une source d'embarras et un puits d'obscurités. Il n'y a plus guère, il est vrai, que les taupins les plus naïfs (si j'ose accoupler ces deux termes) qui se laissent encore troubler par le paradoxe bien connu: soit $F(x, y, \alpha) = 0$ une famille de courbes admettant une enveloppe, résolvons par rapport au paramètre α, l'équation de la famille devient $\Phi(x, y) = \alpha$, et où est passée l'enveloppe? Mais si l'on demande pourquoi *en général* une famille de courbes admet une enveloppe, tandis qu'*en général* une équation différentielle, de l'un des types étudiés en Mathématiques Spéciales, n'admet pas d'intégrale singulière; ou bien pourquoi, *en général*, une famille de courbes gauches n'admet pas d'enveloppe, alors qu'elle engendre une surface et qu'*en général*, sur une surface donnée (tout comme dans le plan) une famille de courbes en admet bien une, il peut arriver qu'un bon élève même se trouve étonné. Et demandons-nous pourquoi, dans la discussion du système d'équations $F(x, y, \alpha) = 0$, $F'_\alpha(x, y, \alpha) = 0$, on a l'habitude de parler du cas de l'enveloppe, des lieux de points singuliers et des courbes stationnaires, à l'exclusion de toute autre circonstance imaginable *a priori*, et sans démontrer aucunement que celles-là sont les seules possible: sans doute il y a là, dans le traitement classique de la question, une lacune à combler.

Or, il paraît possible, en modifiant quelque peu le point de vue, en introduisant quelques considérations géométriques auxiliaires, en précisant les théorèmes dont on a à se servir, d'éclaircir beaucoup le problème. Je ne sais pas du tout si les quelques idées que je vais exposer sont originales; peut-être sont-elles déjà familières à certains professeurs; mais je ne les crois pas généralement connues, et, à ce titre, elles méritent sans doute la publication.

Il me semble d'abord que le titre de la leçon est mal choisi: elle devrait s'intituler plutôt «*Théorie des familles de courbes planes à un paramètre*». L'équation d'une telle famille sera supposée de la forme $F(x, y, \alpha) = 0$; on pourrait supposer aussi que les courbes de la famille sont données elles-mêmes sous forme paramétrique: $x = f(t, \alpha)$, $y = g(t, \alpha)$; ce cas sera exclu pour le moment. D'ailleurs, tout comme on fait l'étude locale des courbes avant de faire leur étude globale, nous aurons ici à faire *l'étude locale de la famille de courbes* $F(x, y, \alpha) = 0$: étude locale *au voisinage d'un système de valeurs* (x_0, y_0, α_0) vérifiant l'équation $F = 0$. *C'est cette étude qui constitue l'objet véritable de la leçon.* Quant à l'étude globale des familles de courbes, on ne la fait en réalité, dans les classes de Spéciales, que sur des exemples particuliers: c'est là, comme on sait, un excellent sujet d'exercices.

Quant à l'outil à employer dans cette étude, ce sera nécessairement *le théorème des fonctions implicites*; et l'on va voir qu'il suffit de posséder ce théorème dans le cas d'*une seule équation à une seule fonction inconnue*: si l'équation $f(x, y, z) = 0$ est vérifiée pour (x_0, y_0, z_0), si f possède au voisinage de ce point des dérivées partielles continues, et si f'_z ne s'y annule pas, il existe une fonction $z(x, y)$ et une seule, définie et continûment dérivable dans un certain voisinage de (x_0, y_0), et prenant en ce point la valeur z_0.

De là résulte aussitôt une première conclusion essentielle sur la famille de courbes $F(x, y, \alpha) = 0$. Bien entendu, on suppose (une fois pour toutes) que F est continûment dérivable en x, y, α pour toutes les valeurs de ces variables dont il sera question. Soit (x_0, y_0, α_0) un système de valeurs satisfaisant à $F = 0$; on ne considère dorénavant que les valeurs de (x, y, α) voisines de celles-là. Dans ces conditions, *si* $F'_\alpha(x_0, y_0, \alpha_0) \neq 0$, *on peut résoudre en* α, et l'équation de la famille devient:

$$\alpha = \Phi(x, y).$$

Autrement dit, *par tout point* (x, y) dans un certain voisinage de (x_0, y_0) *passe une courbe de la famille et une seule* (dans un voisinage de la courbe C_{α_0} correspondant au paramètre α_0). On obtient évidemment l'équation différentielle de la famille de courbes en différentiant; c'est:

$$d\,\Phi \equiv \Phi'_x\,dx + \Phi'_y\,dy = 0.$$

Réciproquement, si une courbe E est tangente en chacun de ses points à une courbe de la famille, c'est une solution de cette équation différentielle; donc on a, sur E, $\Phi =$ constante, et E appartient à la famille: de sorte qu'il ne saurait, dans ce cas, y avoir d'enveloppe (c'est en somme le théorème d'unicité pour les équations différentielles du premier ordre).

Plus précisément, on peut considérer d'abord le cas où C_{α_0} possède en (x_0, y_0) un point régulier, c'est-à-dire où l'on n'a pas à la fois, en (x_0, y_0, α_0), $F'_x = 0$ et $F'_y = 0$: ce cas sera appelé le *cas général*, tout autre cas étant considéré comme exceptionnel (le cas général est celui qui correspond, par exemple, aux solutions d'une équation différentielle du premier ordre dans les conditions du théorème d'existence). Si maintenant on suppose $F'_\alpha \neq 0$, mais $F'_x = F'_y = 0$, on a des singularités dont les plus simples (les *cols* et les *centres*) correspondent au cas où C_{α_0} possède en (x_0, y_0) un point double à tangentes distinctes, réelles ou imaginaires. Comme il est naturel, l'hypothèse $F'_\alpha \neq 0$ conduit aux différentes dispositions présentées par les courbes de niveau sur les cartes géographiques, et cette remarque suggère de considérer dans tous les cas la famille $F = 0$ comme la famille des courbes de niveau (en projection sur Oxy) de la surface $F(x, y, z) = 0$. On voit alors que le *cas général* est celui de tous les points où le plan tangent n'est ni horizontal, ni vertical; et il y a des points exceptionnels de trois sortes: 1° plan tangent horizontal; 2° plan tangent vertical (points situés sur le contour apparent); 3° points singuliers de la surface (je suppose déjà connue la notion de plan tangent à une surface, indispensable pour un exposé intuitivement clair). On voit aussi déjà que $F'_\alpha = 0$ est la condition *nécessaire et suffisante* pour qu'on soit dans le 2e ou 3e cas, et que c'est une condition *nécessaire* pour qu'il y ait enveloppe.

Il n'est guère possible de faire une théorie générale des points exceptionnels de la première sorte (pas plus que des points multiples des courbes algébriques, les deux questions étant d'ailleurs étroitement liées). Observons seulement que, si l'équation de la famille a été mise sous forme résolue en α, ces points sont définis par $\Phi'_x = \Phi'_y = 0$: ils sont donc en général *isolés*; s'ils ne le sont pas, ils forment des courbes qui alors appartiennent nécessairement à la famille, puisque sur une telle courbe $d\Phi = 0$. De telles courbes d'ailleurs ne sont exceptionnelles qu'en apparence pour la famille, mais nous n'approfondirons pas ce point, qu'il est facile de mettre en évidence sur des exemples.

Nous ne pouvons songer, non plus, à faire une théorie des points de troisième sorte: disons seulement qu'ils peuvent être *isolés*, ou bien faire partie de *lignes singulières* pour la surface $F = 0$, et, dans ce cas, la projection d'une telle ligne sera un *lieu de points singuliers* pour les courbes de la famille.

Le cas qui nous reste à étudier est donc celui du *contour apparent*, qui est bien celui de l'enveloppe au sens classique: il est clair en effet que par tout point du contour apparent passe une courbe de niveau, qui sera tangente au contour apparent en projection horizontale. Supposons donc que l'on ait, au point (x_0, y_0, α_0), $F = F'_\alpha = 0$, et (par exemple) $F'_y \neq 0$. On pourra résoudre l'équation $F = 0$ par rapport à y, donc la supposer remplacée par l'équation équivalente:

$$y = f(x, \alpha)$$

de sorte que l'on aura $y_0 = f(x_0, \alpha_0)$ et $f'_\alpha(x_0, \alpha_0) = 0$. Le contour apparent sera défini, au voisinage du point étudié, par les équations:

$$y = f(x, \alpha), \qquad f'_\alpha(x, \alpha) = 0$$

et l'on aura plusieurs cas à distinguer suivant qu'en (x_0, y_0, α_0) il possède une tangente oblique, une tangente verticale, une tangente horizontale, ou un point singulier.

Dans les deux premiers cas, on aura, en (x_0, y_0, α_0), $(\partial^2 f/\partial x\, \partial\alpha) \neq 0$, de sorte qu'on pourra résoudre par rapport à x la deuxième des équations du contour apparent, et celui-ci s'écrira:

$$y = f(x, \alpha), \qquad x = \varphi(\alpha).$$

Ce sont là les équations du contour apparent, ou bien encore (en se plaçant dans le plan Oxy et considérant α comme un paramètre) *les équations paramétriques de l'enveloppe*. Celle-ci aura en (x_0, y_0) un point ordinaire si le contour apparent n'est pas à tangente verticale, c'est-à-dire si $\partial^2 f/\partial\alpha^2 \neq 0$, un point singulier (en général, un point de rebroussement) si $\partial^2 f/\partial\alpha^2$ s'annule en (x_0, y_0, α_0) sans s'annuler identiquement sur le contour apparent, et se réduit à un point si le contour apparent, au voisinage du point étudié, a une tangente constamment verticale, c'est-à-dire se réduit à un segment de droite verticale: dans ce dernier cas, toutes les courbes de la famille passent par le point (x_0, y_0) sans être tangentes à une même direction (puisque $\partial^2 f/\partial x\, \partial\alpha \neq 0$), et la famille présente un *nœud* en (x_0, y_0). Ce cas étant laissé de côté, supposons d'abord que la tangente en (x_0, y_0, α_0) ne soit pas verticale, donc que $\partial^2 f/\partial\alpha^2 \neq 0$; et soit, pour fixer les idées, $\partial^2 f/\partial\alpha^2 > 0$. Les sections de la surface par les plans $x =$ constante ont donc leur concavité tournée vers les y positifs: il en résulte que la projection de la surface est tout entière située, par rapport à l'enveloppe, du côté des y positifs. Soient A et B les deux régions déterminées par l'enveloppe, dans un voisinage du point (x_0, y_0), A se trouvant du côté des y positifs: on voit que la famille de courbes étudiée se trouve tout entière, au voisinage de (x_0, y_0, α_0), dans la région A. On voit de plus (en se plaçant encore dans les plans x = constante et coupant, dans ces plans, par des droites y = constante), que toute verticale ayant son pied dans la région A coupe la surface en deux points exactement, ces points venant se confondre quand le pied vient sur l'enveloppe; autrement dit, par tout point de la région A passent deux courbes de la famille, et par tout point de l'enveloppe passe une courbe et une seule de la famille, tangente en ce point à l'enveloppe. En particulier, tout point (x_1, y_1) de la courbe C_{α_0}, voisin de (x_0, y_0), appartient à une courbe C_{α_1} et une seule, voisine de C_{α_0}; le plan tangent à la surface en (x_1, y_1, α_1) n'étant ni horizontal ni vertical, on se trouve en ce point dans le cas général, de sorte que α_1 dépend d'une manière continue du point (x_1, y_1) quand celui-ci décrit un arc de la courbe C_{α_0}, situé dans un voisinage de (x_0, y_0) mais ne comprenant pas ce point; enfin, quand (x_1, y_1) tend vers (x_0, y_0) sur C_{α_0}, α_1 tend vers α_0, car il reste dans un voisinage de α_0 et ne saurait avoir aucune autre valeur limite. Le point (x_0, y_0), point de contact de C_{α_0} avec l'enveloppe, est donc bien aussi le point caractéristique de C_{α_0}, limite de l'intersection de C_{α_0} avec une courbe voisine de la famille (c'est ce qu'on verrait plus facilement encore si l'on supposait que, dans l'équation de la surface, $F(x, y, \alpha)$ est un polynome en α).

Le cas ci-dessus décrit est bien celui auquel on est accoutumé dans la théorie des enveloppes: le point (x_0, y_0) correspondant sera appelé un *point général* de l'enveloppe. Revenant à l'équation $F(x, y, \alpha) = 0$, il est facile de donner les conditions pour qu'on soit en un point général: le contour apparent étant déterminé en effet par l'intersection des surfaces $F = 0$, $F'_\alpha = 0$, il faut et il suffit, pour qu'il en soit ainsi, que les plans tangents à ces surfaces se coupent suivant une droite qui ne soit ni horizontale ni verticale. Or ils ont respectivement pour paramètres directeurs $(F'_x, F'_y, 0)$ et $(F''_{\alpha x}, F''_{\alpha y}, F''_{\alpha^2})$; on devra donc avoir, au point (x_0, y_0, α_0):

$$\frac{\partial^2 F}{\partial \alpha^2} \neq 0, \qquad \frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial^2 F}{\partial \alpha\, \partial y} - \frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial^2 F}{\partial \alpha\, \partial x} \neq 0.$$

La première condition exprime que l'on n'est pas en même temps en un point de l'enveloppe de la famille $F'_\alpha(x, y, \alpha) = 0$; la seconde exprime que les courbes $F(x, y, \alpha) = 0$ et $F'_\alpha(x, y, \alpha) = 0$ ne sont pas tangentes au point considéré.

Reste à étudier les *points exceptionnels* de l'enveloppe, où l'une au moins de ces conditions n'est pas vérifiée. Observons que si la tangente au contour apparent reste horizontale sur tout un arc, cet arc sera une courbe de niveau, donc (en projection horizontale) une courbe de la famille: on a une *courbe stationnaire*; suivant les définitions qu'on donne, on peut considérer qu'elle constitue ou non un arc d'enveloppe. Comme on a, dans ce cas, $\partial^2 f/\partial\alpha^2 \neq 0$, par tout point voisin de (x_0, y_0) et situé par rapport à l'enveloppe (en supposant $\partial^2 f/\partial\alpha^2 > 0$) du côté des y positifs, passent deux courbes de la famille: il peut arriver, d'ailleurs, que celles-ci se confondent en projection horizontale (par exemple si la surface est symétrique par rapport au plan $\alpha = \alpha_0$). Dans tous les autres cas, les points exceptionnels de l'enveloppe sont des points isolés. S'il s'agit d'un point du contour apparent à tangente verticale, ce sera en général, en projection, un point de rebroussement de l'enveloppe; et un calcul facile montre que dans ce cas la tangente de rebroussement n'est autre que la trace du plan tangent à la surface: toute courbe de la famille est donc tangente en un point et un seul à l'enveloppe, et la courbe C_{α_0} est tangente en (x_0, y_0) à la tangente de rebroussement de l'enveloppe. Si l'on a un point du contour apparent à tangente horizontale, on pourra, mettant de nouveau l'équation de la surface sous la forme $y = f(x, \alpha)$, résoudre en α l'équation $f'_\alpha(x, \alpha) = 0$, de sorte que les équations du contour apparent seront:

$$y = f(x, \alpha), \qquad \alpha = \psi(x).$$

On aura $\partial^2 f/\partial\alpha^2 \neq 0$, de sorte qu'ici encore toutes les courbes de la famille se trouveront dans l'une des deux régions déterminées par l'enveloppe; et tout point de cette région appartiendra à deux courbes de la famille. Mais, si l'on suppose $\partial^2\psi/\partial x^2 \neq 0$, et (pour fixer les idées) $\partial^2\psi/\partial x^2 > 0$, toute courbe de la famille correspondant à un $\alpha > \alpha_0$ touchera l'enveloppe en deux points voisins de (x_0, y_0), et toute courbe de la famille correspondant à un $\alpha < \alpha_0$ ne la touchera pas; C_{α_0} touche l'enveloppe en le seul point (x_0, y_0), ou, si l'on préfère, en deux points confondus. Si $\partial^2\psi/\partial x^2 = 0$, le contour apparent a un point d'inflexion.

Enfin, si le contour apparent a en (x_0, y_0, α_0) un point singulier, une étude générale est impossible. Le cas le plus simple est celui du point double à tangentes réelles distinctes: en projection horizontale, on a deux branches de l'enveloppe, tangentes l'une à l'autre en (x_0, y_0), et toute courbe de la famille est tangente à chacune de ces deux branches au voisinage de (x_0, y_0).

Nous n'avons pu faire une étude complète de tous les cas possibles. Du moins sommes-nous sûrs de n'en avoir laissé échapper aucun dans notre classification; et nous voyons de plus que les seuls points, exceptionnels pour la famille étudiée, qui puissent être distribués sur des courbes, sont ceux qui appartiennent aux courbes suivantes: 1° courbes de niveau à plan tangent horizontal; 2° lieux de points singuliers; 3° enveloppe proprement dite; 4° courbes stationnaires. Quant aux autres, ce seront des points isolés. Excepté pour les points généraux de l'enveloppe, notre étude ne dispense d'ailleurs pas de faire, sur chaque cas particulier, un examen plus approfondi.

Si maintenant l'on suppose que les courbes de la famille soient données sous forme paramétrique:

$$x = f(t, \alpha), \qquad y = g(t, \alpha),$$

on voit qu'on sera, au voisinage d'un point (t_0, α_0), dans le *cas général* si l'on peut résoudre ces équations en t, α, et si, par conséquent, le déterminant fonctionnel

$$\frac{\partial f}{\partial t}\frac{\partial g}{\partial \alpha} - \frac{\partial f}{\partial \alpha}\frac{\partial g}{\partial t}$$

ne s'annule pas. S'il s'annule, on peut reprendre toute l'étude sur des principes analogues à ceux qui ont été exposés ici. Mais il faut faire usage, comme on voit, du théorème des fonctions implicites pour deux équations à deux fonctions inconnues, donc, dépasser le cadre habituel des Mathématiques Spéciales. Si l'on tient à étudier ce problème, il est possible sans doute de tourner la difficulté; mais la nécessité ne paraît pas s'en imposer.

A. WEIL
Maître de conférences
à la Faculté des Sciences de Strasbourg