Geometría Proyectiva

Segundo Cuatrimestre 2019

Familias uniparamétricas de curvas

Para $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ denotemos $C(f) = f^{-1}(0) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / f(x, y) = 0\}$. Suponemos que f satisface las hipótesis del teorema de la función implícita en todo punto de $C(f)$. Decimos que $C(f)$ es la curva implícita definida por f. Sea $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$. Para cada $t \in \mathbb{R}$ denotamos $F_t : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la función definida por $F_t(x, y) = F(t, x, y)$. Denominamos *familia uniparamétrica de curvas implícitas* definida por F a la colección de curvas implícitas $\{C(F_t)\}_{t\in\mathbb{R}}$.

Similarmente definimos familias uniparamétricas de curvas paramétricas.

Una *envolvente* para una familia de curvas planas $\{C_t\}$ es una curva C que no pertenece a la familia y tal que para cada $p \in C$ existe un $t \in \mathbb{R}$ tal que C y C_t son tangentes en p. Por ejemplo, la *evoluta* de una curva es una envolvente de sus rectas normales.

(1) Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una funcion continua y localmente Lipschitz en su segunda variable. Consideramos ecuaciones diferenciales de primer orden del tipo

$$\begin{cases} y'(x) = f(x, y(x)) \\ y(0) = t \end{cases}$$

Probar que la solución general constituye una familia uniparamétrica de curvas en $\mathbb{R}^2$.

Probar que una envolvente de dicha familia también es solución de la misma ecuación. Se la denomina *solución singular*.

(2) Sea $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ y sea $\{C(F_t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ la familia de curvas implícitas definida por F. Considere los siguiente conjuntos de $\mathbb{R}^2$:

$$E = \bigcup_{C \text{ envolvente de } C_t} C,$$

$$D = \{p \text{ tal que existe } t_p |\ F(x, y, t_p) = \frac{\partial F}{\partial t}(x, y, t_p) = 0\},$$

$$I = \{p = \lim_{n\to\infty} p_n |\ p_n \in C_{t_{n_1}} \cap C_{t_{n_2}} \text{ con } n_1 \neq n_2, |n_1 - n_2| \to 0\},$$

$$B = \partial \left(\bigcup_t C_t \right).$$

Investigar las posibles contenciones entre dichos conjuntos.

(3) Usando que $E \subseteq D$, hallar una envolvente para las siguientes familias de curvas, escribir la ecuación diferencial asociada y dibujar las curvas integrales junto con las soluciones singulares.
   (a) La familia de círculos definida por $F(x, y, t) = (x - t)^2 + y^2 - 1$.
   (b) La familia de rectas definida por $F(x, y, t) = y - 2tx - t^2$.

(4) Dada la ecuación diferencial $y = xy' + \frac{1}{y'}$, hallar una familia de curvas integrales que sean soluciones y esbozar un dibujo con las curvas integrales. Hallar una envolvente para tal familia, dibujarla y verificar que es una solución singular para la ecuación diferencial.

Más detalles en Rey Pastor-Pi Calleja-Trejo, volumen 3, o `https://en.wikipedia.org/wiki/Envelope_(mathematics)`