Test de hipótesis.

[1]Universidad de Buenos Aires and CONICET, Argentina

Familias de CVM

Una familia de distribuciones discretas o continuas con densidad (o función de probabilidad puntual) $f(\mathbf{x}, \theta)$, $\boldsymbol{\theta} \in \boldsymbol{\Theta} \subset \mathbb{R}$ se dice de *cociente de verosimilitud monótono* (**CVM**) en $T = T(\mathbf{X})$, si para todo $\theta_1 < \theta_2$

(i) Las distribuciones correspondientes a $f(\mathbf{x}, \theta_1)$ y $f(\mathbf{x}, \theta_2)$ son distintas

(ii) $\dfrac{f(\mathbf{x}, \theta_2)}{f(\mathbf{x}, \theta_1)} = g_{\theta_1 \theta_2}(T(\mathbf{x}))$, donde $g_{\theta_1 \theta_2}(t)$ es una función no decreciente en el conjunto

$$\mathcal{S} = \{t : t = T(\mathbf{x}) \quad \text{con } f(\mathbf{x}, \theta_1) > 0 \text{ ó } f(\mathbf{x}, \theta_2) > 0\}$$

Familias de CVM: Teorema

Sea $\mathbf{X} \sim f(\mathbf{x}, \theta)$ *con* $\theta \in \Theta \subset \mathbb{R}$*, perteneciente a una familia de CVM en* $T = T(\mathbf{X})$*. Luego*

(i) Existen k_α y γ_α tales que

$$\phi(\mathbf{X}) = \begin{cases} 1 & \text{si } T > k_\alpha \\ \gamma_\alpha & \text{si } T = k_\alpha \\ 0 & \text{si } T < k_\alpha \end{cases} \tag{1}$$

satisface

$$\mathbb{E}_{\theta_0}(\phi(\mathbf{X})) = \alpha\ . \tag{2}$$

(ii) Sea ϕ es un test de la forma (1) que satisface (2). Luego ϕ es el test **UMP** de nivel menor o igual que $\alpha > 0$ para

$$H_0 : \theta = \theta_0 \quad \text{contra} \quad H_1 : \theta > \theta_0\ .$$

Familias de CVM: Teorema

(iii) $\beta_\phi(\theta)$ es monótona no decreciente para todo θ y estrictamente creciente para todo θ tal que $0 < \beta_\phi(\theta) < 1$.

(iv) Sea ϕ un test de la forma (1) que satisface (2). Luego, ϕ es el test **UMP** de nivel menor o igual que $\alpha > 0$ para

$$H_0 : \theta \leq \theta_0 \quad \text{contra} \quad H_1 : \theta > \theta_0 \, .$$

Familias de CVM: Teorema

Sea $\mathbf{X} \sim f(\mathbf{x}, \theta)$ *con* $\theta \in \Theta \subset \mathbb{R}$, *perteneciente a una familia de CVM en* $T = T(\mathbf{X})$. *Luego*

(i) Existen k_α y γ_α tales que

$$\phi(\mathbf{X}) = \begin{cases} 1 & \text{si } T < k_\alpha \\ \gamma_\alpha & \text{si } T = k_\alpha \\ 0 & \text{si } T > k_\alpha \end{cases} \tag{3}$$

satisface

$$\mathbb{E}_{\theta_0}(\phi(\mathbf{X})) = \alpha \ . \tag{4}$$

(ii) Sea ϕ es un test de la forma (3) que satisface (4). Luego ϕ es el test **UMP** de nivel menor o igual que $\alpha > 0$ para

$$H_0 : \theta = \theta_0 \quad \text{contra} \quad H_1 : \theta < \theta_0 \ .$$

Familias de CVM: Teorema

(iii) $\beta_\phi(\theta)$ es monótona no creciente para todo θ y estrictamente decreciente para todo θ tal que $0 < \beta_\phi(\theta) < 1$.

(iv) Sea ϕ un test de la forma (3) que satisface (4). Luego, ϕ es el test **UMP** de nivel menor o igual que $\alpha > 0$ para

$$H_0 : \theta \geq \theta_0 \quad \text{contra} \quad H_1 : \theta < \theta_0 \ .$$

Caso Normal

- $X_1, \ldots, X_n$ m.a. $N(\mu, \sigma_0^2)$ σ_0^2 conocido.
- $H_0 : \mu = \mu_0$ contra $H_1 : \mu = \mu_1$ con $\mu_1 > \mu_0$

Caso Normal

- $X_1, \ldots, X_n$ m.a. $N(\mu, \sigma_0^2)$ σ_0^2 conocido.
- $H_0 : \mu = \mu_0$ contra $H_1 : \mu = \mu_1$ con $\mu_1 > \mu_0$
  El test **UMP** de nivel α es

$$\phi_1(X_1, \ldots, X_n) = \begin{cases} 1 & \text{si } \sqrt{n}\frac{(\overline{X} - \mu_0)}{\sigma_0} \geq z_\alpha \\ & \\ 0 & \text{si } \sqrt{n}\frac{(\overline{X} - \mu_0)}{\sigma_0} < z_\alpha \end{cases}$$

Caso Normal

- $X_1, \ldots, X_n$ m.a. $N(\mu, \sigma_0^2)$ σ_0^2 conocido.
- $H_0 : \mu = \mu_0$ contra $H_1 : \mu = \mu_1$ con $\mu_1 > \mu_0$
  El test **UMP** de nivel α es

$$\phi_1(X_1, \ldots, X_n) = \begin{cases} 1 & \text{si } \sqrt{n}\frac{(\overline{X}-\mu_0)}{\sigma_0} \geq z_\alpha \\ \\ 0 & \text{si } \sqrt{n}\frac{(\overline{X}-\mu_0)}{\sigma_0} < z_\alpha \end{cases}$$

- ϕ_1 es **UMP** de nivel α para

$$H_0 : \mu = \mu_0 \quad H_1 : \mu > \mu_0$$

- $\beta_{\phi_1}(\mu) = 1 - \Phi\left(z_\alpha + \sqrt{n}\frac{(\mu_0 - \mu)}{\sigma_0}\right)$

Caso Normal

- $X_1, \ldots, X_n$ m.a. $N(\mu, \sigma_0^2)$ σ_0^2 conocido,
- $H_0 : \mu = \mu_0$ contra $H_1 : \mu = \mu_1$ con $\mu_1 < \mu_0$

Caso Normal

- $X_1, \ldots, X_n$ m.a. $N(\mu, \sigma_0^2)$ σ_0^2 conocido,
- $H_0 : \mu = \mu_0$ contra $H_1 : \mu = \mu_1$ con $\mu_1 < \mu_0$
  El test **UMP** de nivel α es

$$\phi_2(X_1, \ldots, X_n) = \begin{cases} 1 & \text{si } \sqrt{n}\frac{(\overline{X}-\mu_0)}{\sigma_0} \leq -z_\alpha \\ & \\ 0 & \text{si } \sqrt{n}\frac{(\overline{X}-\mu_0)}{\sigma_0} > -z_\alpha \end{cases}$$

Caso Normal

- $X_1, \ldots, X_n$ m.a. $N(\mu, \sigma_0^2)$ σ_0^2 conocido,
- $H_0 : \mu = \mu_0$ contra $H_1 : \mu = \mu_1$ con $\mu_1 < \mu_0$
  El test **UMP** de nivel α es

$$\phi_2(X_1, \ldots, X_n) = \begin{cases} 1 & \text{si } \sqrt{n}\frac{(\overline{X}-\mu_0)}{\sigma_0} \leq -z_\alpha \\ \\ 0 & \text{si } \sqrt{n}\frac{(\overline{X}-\mu_0)}{\sigma_0} > -z_\alpha \end{cases}$$

- ϕ_2 es **UMP** de nivel α para

$$H_0 : \mu = \mu_0 \qquad H_1 : \mu < \mu_0$$

- $\beta_{\phi_2}(\mu) = \Phi\left(-z_\alpha + \sqrt{n}\frac{(\mu_0 - \mu)}{\sigma_0}\right)$

Existe siempre un test UMP?

$X_1, \ldots, X_n$ m.a. $N(\mu, \sigma_0^2)$ con σ_0^2 conocido

$H_0 : \mu = \mu_0$ contra $H_1 : \mu \neq \mu_0$

Existe siempre un test UMP?

$X_1, \dots, X_n$ m.a. $N(\mu, \sigma_0^2)$ con σ_0^2 conocido

$H_0 : \mu = \mu_0$ contra $H_1 : \mu \neq \mu_0$

No existe un test UMP para este problema

TEST IUMP

- Un test ϕ de nivel α para $H_0 : \theta \in \Theta_0$ versus $H_1 : \theta \in \Theta_1$, se dice insesgado si

$$\beta_\phi(\theta) \geq \alpha \qquad \forall\, \theta \in \Theta_1$$

TEST IUMP

- Un test ϕ de nivel α para $H_0: \ \theta \in \Theta_0$ versus $H_1: \ \theta \in \Theta_1$, se dice insesgado si

$$\beta_\phi(\theta) \geq \alpha \qquad \forall\, \theta \in \Theta_1$$

- ϕ es un test **IUMP de nivel α** si
  i) $\sup\limits_{\theta \in \Theta_0} \beta_\phi(\theta) = \alpha$

TEST IUMP

- Un test ϕ de nivel α para $H_0 : \theta \in \Theta_0$ versus $H_1 : \theta \in \Theta_1$, se dice insesgado si

$$\beta_\phi(\theta) \geq \alpha \qquad \forall\, \theta \in \Theta_1$$

- ϕ es un test **IUMP de nivel α** si
  i) $\sup_{\theta \in \Theta_0} \beta_\phi(\theta) = \alpha$
  ii) ϕ es insesgado

TEST IUMP

- Un test ϕ de nivel α para $H_0 : \theta \in \Theta_0$ versus $H_1 : \theta \in \Theta_1$, se dice insesgado si

$$\beta_\phi(\theta) \geq \alpha \qquad \forall\, \theta \in \Theta_1$$

- ϕ es un test **IUMP de nivel α** si
  i) $\sup_{\theta \in \Theta_0} \beta_\phi(\theta) = \alpha$
  ii) ϕ es insesgado
  iii) para todo ϕ^* tal que $\begin{cases} \text{a)} & \sup_{\theta \in \Theta_0} \beta_{\phi^*}(\theta) = \alpha \\ \text{b)} & \phi^* \text{ es insesgado} \end{cases}$

  se verifica

$$\beta_\phi(\theta) \geq \beta_{\phi^*}(\theta) \qquad \forall\, \theta \in \Theta_1$$

$$f(x,\theta) = A(\theta)\ \exp\{\theta\, x\} h(x)$$

$$f(x,\theta) = A(\theta)\ \exp\{\theta\, x\} h(x)$$

Diremos que ϕ es un bilateral si es de la forma

$$\phi(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x < x_1 \quad \text{o} \quad x > x_2 \\ \gamma_i & \text{si } x = x_i \\ 0 & \text{si } x_1 < x < x_2 \end{cases} \tag{5}$$

$0 \leq \gamma_i \leq 1$, $-\infty \leq x_1 \leq x_2 \leq +\infty$

TEST IUMP: $H_0: \ \theta_1 \leq \theta \leq \theta_2 \quad H_1: \ \theta > \theta_2$ o $\theta < \theta_1$

$$f(x,\theta) = A(\theta)\ \exp\{\theta\, x\} h(x)$$

Todo test bilateral

$$\phi(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x < x_1 \quad \text{o} \quad x > x_2 \\ \gamma_i & \text{si } x = x_i \\ 0 & \text{si } x_1 < x < x_2 \end{cases}$$

tal que (x_i, γ_i) se eligen de modo que

$$\beta_\phi(\theta_i) = \alpha$$

es **IUMP de nivel α** para H_0 versus H_1.

TEST IUMP: $H_0: \ \theta = \theta_0 \quad H_1: \ \theta \neq \theta_0$

$$f(x,\theta) = A(\theta) \ \exp\{\theta \, x\} h(x)$$

Todo test bilateral

$$\phi(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x < x_1 \quad \text{o} \quad x > x_2 \\ \gamma_i & \text{si } x = x_i \\ 0 & \text{si } x_1 < x < x_2 \end{cases}$$

tal que (x_i, γ_i) se eligen de modo que

$$\beta_\phi(\theta_0) = \alpha \qquad \text{y} \qquad \frac{\partial}{\partial\theta}\beta_\phi(\theta)\Big|_{\theta=\theta_0} = 0$$

es **IUMP de nivel α** para H_0 versus H_1.

Test de Cociente de Máxima verosimilitud

$\mathbf{X} \sim f(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta})$, $\boldsymbol{\theta} \in \Theta$ y se quiere testear

$$H_0 : \boldsymbol{\theta} \in \Theta_0 \text{ versus } H_1 : \boldsymbol{\theta} \in \Theta_1 \qquad \Theta_0 \cup \Theta_1 = \Theta$$

Test de Cociente de Máxima verosimilitud

$\mathbf{X} \sim f(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta})$, $\boldsymbol{\theta} \in \Theta$ y se quiere testear

$$H_0 : \boldsymbol{\theta} \in \Theta_0 \text{ versus } H_1 : \boldsymbol{\theta} \in \Theta_1 \qquad \Theta_0 \cup \Theta_1 = \Theta$$

- $\widehat{\boldsymbol{\theta}}_0$: Estimador de máxima verosimilitud de $\boldsymbol{\theta}$, suponiendo $\boldsymbol{\theta} \in \Theta_0$

Test de Cociente de Máxima verosimilitud

$\mathbf{X} \sim f(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta})$, $\boldsymbol{\theta} \in \Theta$ y se quiere testear

$$H_0 : \boldsymbol{\theta} \in \Theta_0 \text{ versus } H_1 : \boldsymbol{\theta} \in \Theta_1 \qquad \Theta_0 \cup \Theta_1 = \Theta$$

- $\widehat{\boldsymbol{\theta}}_0$: Estimador de máxima verosimilitud de $\boldsymbol{\theta}$, suponiendo $\boldsymbol{\theta} \in \Theta_0$
- $\widehat{\boldsymbol{\theta}}_1$: Estimador de máxima verosimilitud de $\boldsymbol{\theta}$, suponiendo $\boldsymbol{\theta} \in \Theta_1$

Test de Cociente de Máxima verosimilitud

$\mathbf{X} \sim f(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta})$, $\boldsymbol{\theta} \in \Theta$ y se quiere testear

$$H_0 : \boldsymbol{\theta} \in \Theta_0 \text{ versus } H_1 : \boldsymbol{\theta} \in \Theta_1 \qquad \Theta_0 \cup \Theta_1 = \Theta$$

- $\widehat{\boldsymbol{\theta}}_0$: Estimador de máxima verosimilitud de $\boldsymbol{\theta}$, suponiendo $\boldsymbol{\theta} \in \Theta_0$
- $\widehat{\boldsymbol{\theta}}_1$: Estimador de máxima verosimilitud de $\boldsymbol{\theta}$, suponiendo $\boldsymbol{\theta} \in \Theta_1$

$$\begin{aligned} f(\mathbf{X}, \widehat{\boldsymbol{\theta}}_0) &= \max_{\boldsymbol{\theta} \in \Theta_0} f(\mathbf{X}, \boldsymbol{\theta}) \\ f(\mathbf{X}, \widehat{\boldsymbol{\theta}}_1) &= \max_{\boldsymbol{\theta} \in \Theta_1} f(\mathbf{X}, \boldsymbol{\theta}) \end{aligned}$$

Test de Cociente de Máxima verosimilitud

$\mathbf{X} \sim f(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta})$, $\boldsymbol{\theta} \in \Theta$ y se quiere testear

$$H_0 : \boldsymbol{\theta} \in \Theta_0 \text{ versus } H_1 : \boldsymbol{\theta} \in \Theta_1 \qquad \Theta_0 \cup \Theta_1 = \Theta$$

$$L_{10} = \frac{f(\mathbf{x}, \widehat{\boldsymbol{\theta}}_1)}{f(\mathbf{x}, \widehat{\boldsymbol{\theta}}_0)} \geq k_\alpha$$

Test de Cociente de Máxima verosimilitud

$\mathbf{X} \sim f(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta})$, $\boldsymbol{\theta} \in \Theta$ y se quiere testear

$$H_0 : \boldsymbol{\theta} \in \Theta_0 \text{ versus } H_1 : \boldsymbol{\theta} \in \Theta_1 \qquad \Theta_0 \cup \Theta_1 = \Theta$$

$$L_{10} = \frac{f(\mathbf{x}, \widehat{\boldsymbol{\theta}}_1)}{f(\mathbf{x}, \widehat{\boldsymbol{\theta}}_0)} \geq k_\alpha$$

$$\phi(\mathbf{X}) = \begin{cases} 1 & \text{si } f(\mathbf{x}, \widehat{\boldsymbol{\theta}}_1) > k_\alpha\, f(\mathbf{x}, \widehat{\boldsymbol{\theta}}_0) \\ \gamma_\alpha & \text{si } f(\mathbf{x}, \widehat{\boldsymbol{\theta}}_1) = k_\alpha\, f(\mathbf{x}, \widehat{\boldsymbol{\theta}}_0) \\ 0 & \text{si } f(\mathbf{x}, \widehat{\boldsymbol{\theta}}_1) < k_\alpha\, f(\mathbf{x}, \widehat{\boldsymbol{\theta}}_0) \end{cases}$$

Test de Cociente de Máxima verosimilitud

$\mathbf{X} \sim f(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta})$, $\boldsymbol{\theta} \in \Theta$ y se quiere testear

$$H_0: \ \boldsymbol{\theta} \in \Theta_0 \text{ versus } H_1: \ \boldsymbol{\theta} \in \Theta_1 \quad \Theta_0 \cup \Theta_1 = \Theta$$

$$L(\mathbf{X}) = \frac{1}{L_{10}} = \frac{f(\mathbf{x}, \widehat{\boldsymbol{\theta}}_0)}{f(\mathbf{x}, \widehat{\boldsymbol{\theta}}_1)} \leq k_\alpha$$

Test de Cociente de Máxima verosimilitud

$\mathbf{X} \sim f(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta})$, $\boldsymbol{\theta} \in \Theta$ y se quiere testear

$$H_0: \ \boldsymbol{\theta} \in \Theta_0 \text{ versus } H_1: \ \boldsymbol{\theta} \in \Theta_1 \quad \Theta_0 \cup \Theta_1 = \Theta$$

$$L(\mathbf{X}) = \frac{1}{L_{10}} = \frac{f(\mathbf{x}, \widehat{\boldsymbol{\theta}}_0)}{f(\mathbf{x}, \widehat{\boldsymbol{\theta}}_1)} \leq k_\alpha$$

$$\phi(\mathbf{X}) = \begin{cases} 1 & \text{si } L(\mathbf{X}) < k_\alpha \\ \gamma_\alpha & \text{si } L(\mathbf{X}) = k_\alpha \\ 0 & \text{si } L(\mathbf{X}) > k_\alpha \end{cases}$$

Test de Cociente de Máxima verosimilitud

$\mathbf{X} \sim f(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta})$, $\boldsymbol{\theta} \in \Theta$ y se quiere testear

$$H_0: \boldsymbol{\theta} \in \Theta_0 \text{ versus } H_1: \boldsymbol{\theta} \in \Theta_1 \quad \Theta_0 \cup \Theta_1 = \Theta$$

$$L(\mathbf{X}) = \frac{\sup_{\theta \in \Theta_0} f(\mathbf{x}, \theta)}{\sup_{\theta \in \Theta_1} f(\mathbf{x}, \theta)}$$

Test de Cociente de Máxima verosimilitud

$\mathbf{X} \sim f(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta})$, $\boldsymbol{\theta} \in \Theta$ y se quiere testear

$$H_0: \ \boldsymbol{\theta} \in \Theta_0 \text{ versus } H_1: \ \boldsymbol{\theta} \in \Theta_1 \quad \Theta_0 \cup \Theta_1 = \Theta$$

$$L(\mathbf{X}) = \frac{\sup_{\theta \in \Theta_0} f(\mathbf{x}, \theta)}{\sup_{\theta \in \Theta_1} f(\mathbf{x}, \theta)}$$

$$\phi(\mathbf{X}) = \begin{cases} 1 & \text{si } L(\mathbf{X}) < k_\alpha \\ \gamma_\alpha & \text{si } L(\mathbf{X}) = k_\alpha \\ 0 & \text{si } L(\mathbf{X}) > k_\alpha \end{cases}$$

Test de Cociente de Máxima verosimilitud

$\mathbf{X} \sim f(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta})$, $\boldsymbol{\theta} \in \Theta$ y se quiere testear

$$H_0 : \boldsymbol{\theta} \in \Theta_0 \text{ versus } H_1 : \boldsymbol{\theta} \in \Theta_1 \quad \Theta_0 \cup \Theta_1 = \Theta$$

Si

$$\sup_{\theta \in \Theta_1} f(\mathbf{x}, \theta) = \sup_{\theta \in \Theta} f(\mathbf{x}, \theta)$$

Test de Cociente de Máxima verosimilitud

$\mathbf{X} \sim f(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta})$, $\boldsymbol{\theta} \in \Theta$ y se quiere testear

$$H_0 : \boldsymbol{\theta} \in \Theta_0 \text{ versus } H_1 : \boldsymbol{\theta} \in \Theta_1 \quad \Theta_0 \cup \Theta_1 = \Theta$$

Si

$$\sup_{\theta \in \Theta_1} f(\mathbf{x}, \theta) = \sup_{\theta \in \Theta} f(\mathbf{x}, \theta)$$

$$\phi(\mathbf{X}) = \begin{cases} 1 & \text{si } L^*(\mathbf{X}) < k_\alpha \\ \gamma_\alpha & \text{si } L^*(\mathbf{X}) = k_\alpha \\ 0 & \text{si } L^*(\mathbf{X}) > k_\alpha \end{cases}$$

Test de Cociente de Máxima verosimilitud

$\mathbf{X} \sim f(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta})$, $\boldsymbol{\theta} \in \Theta$ y se quiere testear

$$H_0: \ \boldsymbol{\theta} \in \Theta_0 \text{ versus } H_1: \ \boldsymbol{\theta} \in \Theta_1 \quad \Theta_0 \cup \Theta_1 = \Theta$$

Si

$$\sup_{\theta \in \Theta_1} f(\mathbf{x}, \theta) = \sup_{\theta \in \Theta} f(\mathbf{x}, \theta)$$

$$\phi(\mathbf{X}) = \begin{cases} 1 & \text{si } L^*(\mathbf{X}) < k_\alpha \\ \gamma_\alpha & \text{si } L^*(\mathbf{X}) = k_\alpha \\ 0 & \text{si } L^*(\mathbf{X}) > k_\alpha \end{cases}$$

$$L^*(\mathbf{X}) = \frac{\sup_{\theta \in \Theta_0} f(\mathbf{x}, \theta)}{\sup_{\theta \in \Theta} f(\mathbf{x}, \theta)}$$

Caso Normal: $H_0 : \mu = \mu_0$ versus $H_1 : \mu \neq \mu_0$

- $X_1, \ldots, X_n$ i.i.d $X_i \sim N(\mu, \sigma_0^2)$, σ_0^2 conocido.

Caso Normal: $H_0 : \mu = \mu_0$ versus $H_1 : \mu \neq \mu_0$

- $X_1, \ldots, X_n$ i.i.d $X_i \sim N(\mu, \sigma_0^2)$, σ_0^2 conocido.

El test de cociente de máxima verosimilitud es

$$\phi_1(X_1, \ldots, X_n) = \begin{cases} 1 & \text{si } \sqrt{n}\frac{|\overline{X}-\mu_0|}{\sigma_0} \geq z_{\frac{\alpha}{2}} \\ 0 & \text{si } \sqrt{n}\frac{(|\overline{X}-\mu_0|)}{\sigma_0} < z_{\frac{\alpha}{2}} \end{cases}$$

Caso Normal: $H_0 : \mu = \mu_0$ versus $H_1 : \mu \neq \mu_0$

- $X_1, \ldots, X_n$ i.i.d $X_i \sim N(\mu, \sigma_0^2)$, σ_0^2 conocido.

El test de cociente de máxima verosimilitud es

$$\phi_1(X_1, \ldots, X_n) = \begin{cases} 1 & \text{si } \sqrt{n}\frac{|\overline{X}-\mu_0|}{\sigma_0} \geq z_{\frac{\alpha}{2}} \\ 0 & \text{si } \sqrt{n}\frac{(|\overline{X}-\mu_0|)}{\sigma_0} < z_{\frac{\alpha}{2}} \end{cases}$$

cumple

$$\beta_\phi(\mu_0) = \alpha$$

Este test es IUMP

El test anterior es un caso particular del test IUMP para testear

$$H_0 : \ \theta = \theta_0 \quad H_1 : \ \theta \neq \theta_0$$

en familias exponenciales a un parámetro

$$f(x, \theta) = A(\theta) \ \exp\{\theta \, x\} h(x)$$

dado por

$$\phi(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x < x_1 \quad \text{o} \quad x > x_2 \\ \gamma_i & \text{si } x = x_i \\ 0 & \text{si } x_1 < x < x_2 \end{cases}$$

tal que (x_i, γ_i) se eligen de modo que

$$\beta_\phi(\theta_0) = \alpha \qquad \text{y} \qquad \frac{\partial}{\partial \theta} \beta_\phi(\theta) \Big|_{\theta = \theta_0} = 0$$

Caso Normal: $H_0 : \mu = \mu_0$ versus $H_1 : \mu \neq \mu_0$

- $X_1, \ldots, X_n$ i.i.d $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$, (μ, σ^2) desconocido.
- $s^2 = \dfrac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2}{n-1}$.

Caso Normal: $H_0 : \mu = \mu_0$ versus $H_1 : \mu \neq \mu_0$

- $X_1, \ldots, X_n$ i.i.d $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$, (μ, σ^2) desconocido.
- $s^2 = \dfrac{\sum_{i=1}^n (X_i - \overline{X})^2}{n-1}$.

El test de cociente de máxima verosimilitud es

$$\phi_1(X_1, \ldots, X_n) = \begin{cases} 1 & \text{si } \sqrt{n}\frac{|\overline{X}-\mu_0|}{s} \geq t_{n-1,\frac{\alpha}{2}} \\ \\ 0 & \text{si } \sqrt{n}\frac{|\overline{X}-\mu_0|}{s} < t_{n-1,\frac{\alpha}{2}} \end{cases}$$

Caso Normal: $H_0 : \mu = \mu_0$ versus $H_1 : \mu \neq \mu_0$

- $X_1, \dots, X_n$ i.i.d $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$, (μ, σ^2) desconocido.
- $s^2 = \dfrac{\sum_{i=1}^n (X_i - \overline{X})^2}{n-1}$.

El test de cociente de máxima verosimilitud es

$$\phi_1(X_1, \dots, X_n) = \begin{cases} 1 & \text{si } \sqrt{n}\frac{|\overline{X} - \mu_0|}{s} \geq t_{n-1,\frac{\alpha}{2}} \\ \\ 0 & \text{si } \sqrt{n}\frac{|\overline{X} - \mu_0|}{s} < t_{n-1,\frac{\alpha}{2}} \end{cases}$$

cumple

$$\beta_\phi(\mu_0, \sigma) = \alpha \qquad \forall\ \sigma$$

Este test también es IUMP

Distribución $\mathcal{T}_n(\Delta)$

- *Distribución de Student no central con n grados de libertad y parámetro de no centralidad* Δ: $\mathcal{T}_n(\Delta)$ es la distribución de

$$\frac{U + \Delta}{\sqrt{V/n}}$$

con $U \sim N(0,1)$, $V \sim \chi^2_n$ y además U y V son independientes.

Distribución $\mathcal{T}_n(\Delta)$

a) Sea $X_\Delta \sim \mathcal{T}_n(\Delta)$,

$$c_{n,k}(\Delta) = P(X_\Delta \geq k),$$

$\Longrightarrow c_{n,k}(\Delta)$ es una función monótona creciente de Δ.

b) Sea $X_\Delta \sim \mathcal{T}_n(\Delta)$,

$$\pi_{n,k}(\Delta) = P(|X_\Delta| \geq k),$$

$\Longrightarrow \pi_{n,k}(\Delta)$ es una función monótona creciente de $|\Delta|$.

Caso Normal: $H_0 : \mu = \mu_0$ versus $H_1 : \mu \neq \mu_0$

La potencia de

$$\phi_1(X_1, \ldots, X_n) = \begin{cases} 1 & \text{si } |T| = \sqrt{n}\frac{|\overline{X}-\mu_0|}{s} \geq t_{n-1,\frac{\alpha}{2}} \\ 0 & \text{si } |T| = \sqrt{n}\frac{|\overline{X}-\mu_0|}{s} < t_{n-1,\frac{\alpha}{2}} \end{cases}$$

depende de (μ, σ^2) sólo a través de $|\Delta|$

$$\Delta = \sqrt{n}\,\frac{(\mu - \mu_0)}{\sigma}$$

Es una función monótona creciente de $|\Delta|$

$$\beta_\phi(\mu, \sigma^2) = \mathbf{P}_{\mu,\sigma^2}(|\mathbf{T}| \geq \mathbf{t}_{\mathbf{n-1},\frac{\alpha}{2}}) = \pi_{\mathbf{n-1},\mathbf{t}_{\mathbf{n-1},\frac{\alpha}{2}}}(\mathbf{\Delta})\,.$$

Test de CMV para $H_0 : \mu \leq \mu_0$ versus $H_1 : \mu > \mu_0$

- $X_1, \ldots, X_n$ i.i.d $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$, (μ, σ^2) desconocidos.
- $s^2 = \dfrac{\sum_{i=1}^n (X_i - \overline{X})^2}{n-1}$.

Test de CMV para $H_0 : \mu \leq \mu_0$ versus $H_1 : \mu > \mu_0$

- $X_1, \ldots, X_n$ i.i.d $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$, (μ, σ^2) desconocidos.
- $s^2 = \dfrac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2}{n-1}$.

El test de cociente de máxima verosimilitud es

$$\phi_1(X_1, \ldots, X_n) = \begin{cases} 1 & \text{si } \sqrt{n}\frac{(\overline{X}-\mu_0)}{s} \geq t_{n-1,\alpha} \\ 0 & \text{si } \sqrt{n}\frac{(\overline{X}-\mu_0)}{s} < t_{n-1,\alpha} \end{cases}$$

Test de CMV para $H_0 : \mu \leq \mu_0$ versus $H_1 : \mu > \mu_0$

- $X_1, \ldots, X_n$ i.i.d $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$, (μ, σ^2) desconocidos.
- $s^2 = \dfrac{\sum_{i=1}^n (X_i - \overline{X})^2}{n-1}$.

El test de cociente de máxima verosimilitud es

$$\phi_1(X_1, \ldots, X_n) = \begin{cases} 1 & \text{si } \sqrt{n}\frac{(\overline{X}-\mu_0)}{s} \geq t_{n-1,\alpha} \\ 0 & \text{si } \sqrt{n}\frac{(\overline{X}-\mu_0)}{s} < t_{n-1,\alpha} \end{cases}$$

cumple

$$\beta_\phi(\mu_0, \sigma) = \alpha \qquad \forall\ \sigma$$

Test de CMV para $H_0 : \mu \leq \mu_0$ versus $H_1 : \mu > \mu_0$

- $X_1, \ldots, X_n$ i.i.d $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$, (μ, σ^2) desconocidos.

El test de cociente de máxima verosimilitud es

$$\phi_1(X_1, \ldots, X_n) = \begin{cases} 1 & \text{si } \sqrt{n}\frac{(\overline{X}-\mu_0)}{s} \geq t_{n-1,\alpha} \\ \\ 0 & \text{si } \sqrt{n}\frac{(\overline{X}-\mu_0)}{s} < t_{n-1,\alpha} \end{cases}$$

Sea $\Delta = \sqrt{n}(\mu - \mu_0)/\sigma$,

$$\boldsymbol{\beta_\phi(\mu, \sigma^2) = \mathrm{P}_{\mu,\sigma^2}(\mathrm{T} \geq \mathrm{t}_{n-1,\alpha}) = \mathrm{c}_{n-1,\mathrm{t}_{n-1,\alpha}}(\Delta)} \; .$$

$$\sup_{\substack{\mu \leq \mu_0 \\ \sigma > 0}} \beta_\phi(\mu, \sigma^2) = \beta_\phi(\mu_0, 1)$$

Test con nivel asintótico

- $X_1, \ldots, X_n$ m.a. $X_i \sim F(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta})$, $\boldsymbol{\theta} \in \Theta$
- $H_0 : \ \boldsymbol{\theta} \in \Theta_0$ contra $H_1 : \ \boldsymbol{\theta} \in \Theta_1$.

Se dirá que una sucesión de test $\phi_n(X_1, \ldots, X_n)$ tiene nivel de significación asintótico α si

$$\lim_{n \to \infty} \sup_{\boldsymbol{\theta} \in \Theta_0} \beta_{\phi_n}(\boldsymbol{\theta}) = \alpha$$

Distribución asintótica del test de CMV

- $\mathbf{X} = (X_1, \ldots, X_n) \sim f(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta})$ con $\boldsymbol{\theta} = (\theta_1, \ldots, \theta_p) \in \Theta \subset \mathbb{R}^p$ que contiene una esfera.
- Θ_0 es un conjunto de dimensión $p - j$, $1 \leq j \leq p$.
- $H_0 : \ \boldsymbol{\theta} \in \Theta_0$ versus $H_1 : \ \boldsymbol{\theta} \in \Theta_1$, con $\Theta = \Theta_0 \cup \Theta_1$.

$$L^*(\mathbf{X}) = \frac{\sup\limits_{\boldsymbol{\theta} \in \Theta_0} f(\mathbf{X}, \boldsymbol{\theta})}{\sup\limits_{\boldsymbol{\theta} \in \Theta} f(\mathbf{X}, \boldsymbol{\theta})} .$$

Bajo condiciones de regularidad generales en $f(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta})$,
$-2 \ln L^*(\mathbf{X}) \xrightarrow{D} \chi^2_j$ cuando $\boldsymbol{\theta} \in \Theta_0$.

Distribución asintótica del test de CMV

$\Longrightarrow$ Un test de nivel de significación asintótico α está dado por

$$\phi(\mathbf{X}) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad -2\ln L^*(\mathbf{X}) \geq \chi^2_{j,\alpha} \\ 0 & \text{si} \quad -2\ln L^*(\mathbf{X}) < \chi^2_{j,\alpha} \end{cases}$$

Distribución asintótica del test de CMV

$X_1, \ldots, X_n$ i.i.d. $X_1 \sim f(x, \theta)$ con $\theta \in \Theta$ y Θ un abierto en $\mathbb{R}$. Sea $f(\mathbf{x}, \theta)$ la densidad conjunta de $\mathbf{X} = (X_1, \ldots, X_n)$.

Supongamos que se cumplen las siguientes condiciones

(A) *El conjunto $\mathcal{S} = \{x : f(x, \theta) > 0\}$ es independiente de θ.*

(B) *Para todo $x \in \mathcal{S}$, $f(x, \theta)$ tiene derivada tercera respecto de θ continua y tal que*

$$\begin{aligned}
\left|\frac{\partial^3 \ln f(x, \theta)}{\partial \theta^3}\right| &= \left|\frac{\partial^2 \psi(x, \theta)}{\partial \theta^2}\right| \leq K \quad \forall\, x \in \mathcal{S} \quad \forall\, \theta \in \Theta \\
\psi(x, \theta) &= \frac{\partial \ln f(x, \theta)}{\partial \theta}\,.
\end{aligned}$$

Distribución asintótica del test de CMV

(C) *Si* $h(\mathbf{X})$ *es un estadístico tal que* $E_\theta[|h(\mathbf{X})|] < \infty$, $\forall\ \theta \in \Theta$

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\left[\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty} h(\mathbf{x})f(\mathbf{x},\theta)d\mathbf{x}\right] = \int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty} h(\mathbf{x})\frac{\partial f(\mathbf{x},\theta)}{\partial\theta}d\mathbf{x}$$

(D) $0 < I_1(\theta) = E_\theta\left[\left(\frac{\partial \ln f(X_1,\theta)}{\partial\theta}\right)^2\right] < \infty$.

Sea $\widehat{\theta}_n$ *un EMV de* θ *consistente,*

$$L^*(\mathbf{X}) = \frac{f(\mathbf{X},\theta_0)}{\sup_{\theta\in\Theta} f(\mathbf{X},\theta)} = \frac{f(\mathbf{X},\theta_0)}{f(\mathbf{X},\widehat{\theta}_n)} .$$

$$\Longrightarrow \qquad U = -2\ln\left(L^*(\mathbf{X})\right) \xrightarrow{D} \chi^2_1$$

Distribución asintótica del test de CMV

El test

$$\phi(\mathbf{X}) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad U \geq \chi^2_{1,\alpha} \\ 0 & \text{si} \quad U < \chi^2_{1,\alpha} \end{cases}$$

donde $U = -2\ln\left(L^*(\mathbf{X})\right)$, tiene nivel de significación asintótico α.

Hay alguna relación entre tests de hipótesis e intervalos de confianza?

Hay alguna relación entre tests de hipótesis e intervalos de confianza?

Caso Normal

- $X_1, \ldots, X_n$ i.i.d $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$, (μ, σ^2) desconocido.

El test de cociente de máxima verosimilitud es

$$\phi_1(X_1, \ldots, X_n) = \begin{cases} 1 & \text{si } \sqrt{n}\frac{|\overline{X} - \mu_0|}{s} \geq t_{n-1, \frac{\alpha}{2}} \\ 0 & \text{si } \sqrt{n}\frac{|\overline{X} - \mu_0|}{s} < t_{n-1, \frac{\alpha}{2}} \end{cases}$$

Hay alguna relación entre tests de hipótesis e intervalos de confianza?

La región de aceptación del test $\mathcal{A}(\mu_0)$ es

$$\mathcal{A}(\mu_0) = \left\{ \mathbf{X} : \sqrt{n}\frac{|\overline{X} - \mu_0|}{s} < t_{n-1,\frac{\alpha}{2}} \right\}$$

Hay alguna relación entre tests de hipótesis e intervalos de confianza?

La región de aceptación del test $\mathcal{A}(\mu_0)$ es

$$\mathcal{A}(\mu_0) = \left\{ \mathbf{X} : \sqrt{n}\frac{|\overline{X} - \mu_0|}{s} < t_{n-1,\frac{\alpha}{2}} \right\}$$

Por otra parte,

$$\mathcal{S}(\mathbf{X}) = \left\{ \mu : \sqrt{n}\frac{|\overline{X} - \mu|}{s} < t_{n-1,\frac{\alpha}{2}} \right\}$$

$$\mathcal{S}(\mathbf{X}) = \left[\overline{X} - t_{n-1,\frac{\alpha}{2}} \frac{s}{\sqrt{n}}, \overline{X} + t_{n-1,\frac{\alpha}{2}} \frac{s}{\sqrt{n}} \right]$$

es un intervalo de confianza para μ

Regiones de confianza

Dado un vector $\mathbf{X}$ con distribución perteneciente a la familia $F(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta})$ con $\boldsymbol{\theta} \in \Theta$, *una región de confianza $\mathcal{S}(\mathbf{X})$ para $\boldsymbol{\theta}$ con nivel de confianza* $1-\alpha$ será una función que a cada $\mathbf{X}$ le hace corresponder un subconjunto $\mathcal{S}(\mathbf{X}) \subset \Theta$ de manera que

$$\mathbb{P}_{\boldsymbol{\theta}}(\boldsymbol{\theta} \in \mathcal{S}(\mathbf{X})) = 1-\alpha, \qquad \forall \boldsymbol{\theta} \in \Theta$$

Es decir, $\mathcal{S}(\mathbf{X})$ cubre el valor verdadero del parámetro con probabilidad $1-\alpha$.

Regiones de confianza

Dado un vector $\mathbf{X}$ con distribución perteneciente a la familia $F(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta})$ con $\boldsymbol{\theta} \in \Theta$, *una región de confianza $\mathcal{S}(\mathbf{X})$ para $\boldsymbol{\theta}$ con nivel de confianza* $1-\alpha$ será una función que a cada $\mathbf{X}$ le hace corresponder un subconjunto $\mathcal{S}(\mathbf{X}) \subset \Theta$ de manera que

$$\mathbb{P}_{\boldsymbol{\theta}}(\boldsymbol{\theta} \in \mathcal{S}(\mathbf{X})) = 1-\alpha, \qquad \forall \boldsymbol{\theta} \in \Theta$$

Es decir, $\mathcal{S}(\mathbf{X})$ cubre el valor verdadero del parámetro con probabilidad $1-\alpha$.

Caso particular: Si $\boldsymbol{\theta} \in \mathbb{R}$ se dirá que $\mathcal{S}(\mathbf{X})$ es un intervalo de confianza

$$\mathcal{S}(\mathbf{X}) = [a(\mathbf{X}), b(\mathbf{X})]$$

La longitud de $\mathcal{S}(\mathbf{X})$ es

$$L = b(\mathbf{X}) - a(\mathbf{X})$$

Relación entre test y Regiones de confianza

$\mathbf{X} \sim F(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta})$, $\boldsymbol{\theta} \in \Theta$.

- Para cada $\boldsymbol{\theta}_0$ fijo sea $\phi_{\boldsymbol{\theta}_0}$, un test no aleatorizado de nivel α, para

$$H_0 : \boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\theta}_0 \quad \text{versus} \quad H_1 : \boldsymbol{\theta} \neq \boldsymbol{\theta}_0.$$

Relación entre test y Regiones de confianza

$\mathbf{X} \sim F(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta})$, $\boldsymbol{\theta} \in \Theta$.

- Para cada $\boldsymbol{\theta}_0$ fijo sea $\phi_{\boldsymbol{\theta}_0}$, un test no aleatorizado de nivel α, para

$$H_0 : \boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\theta}_0 \quad \text{versus} \quad H_1 : \boldsymbol{\theta} \neq \boldsymbol{\theta}_0.$$

- $\mathcal{A}(\boldsymbol{\theta}_0) = \{\mathbf{X} : \phi_{\boldsymbol{\theta}_0} = 0\}$ Región de aceptación de $\phi_{\boldsymbol{\theta}_0}$

- $\mathcal{S}(\mathbf{X}) = \{\boldsymbol{\theta} : \phi_{\boldsymbol{\theta}}(\mathbf{X}) = 0\} = \{\boldsymbol{\theta} : \mathbf{X} \in \mathcal{A}(\boldsymbol{\theta})\}$

$\Longrightarrow \mathcal{S}(\mathbf{X})$ es una región de confianza de nivel $1 - \alpha$ para $\boldsymbol{\theta}$

Relación entre test y Regiones de confianza

- Recíprocamente, si $\mathcal{S}(\mathbf{X})$ es una región de confianza de nivel $1-\alpha$ para $\boldsymbol{\theta}$, el test

$$\phi_{\boldsymbol{\theta}_0}(\mathbf{X}) = \begin{cases} 1 & \text{si } \boldsymbol{\theta}_0 \notin \mathcal{S}(\mathbf{X}) \\ 0 & \text{si } \boldsymbol{\theta}_0 \in \mathcal{S}(\mathbf{X}) \ . \end{cases}$$

es un test de nivel de α para testear

$$H_0 : \boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\theta}_0 \quad \text{versus} \quad H_1 : \boldsymbol{\theta} \neq \boldsymbol{\theta}_0.$$

Relación entre test y Regiones de confianza

En general podemos decir que si $\mathbf{x}_i \sim f(\mathbf{x}, \theta)$ con $\theta \in \mathbb{R}$:

- Para obtener un intervalos de confianza $[L(\mathbf{X}), U(\mathbf{X})]$ para θ podemos invertir la región de aceptación de un test para la hipótesis

$$H_0 : \theta = \theta_0 \quad \text{versus} \quad H_1 : \theta \neq \theta_0$$

- Para obtener una cota inferior de confianza $[L(\mathbf{X}), +\infty)$ para θ podemos invertir la región de aceptación de un test para la hipótesis

$$H_0 : \theta = \theta_0 \quad \text{versus} \quad H_1 : \theta > \theta_0$$

- Para obtener una cota inferior de confianza $(-\infty, U(\mathbf{X})]$ para θ podemos invertir la región de aceptación de un test para la hipótesis

$$H_0 : \theta = \theta_0 \quad \text{versus} \quad H_1 : \theta < \theta_0$$