

Se recomienda empezar por los ejercicios marcados sin †.

A) Estadísticos suficientes

1. Sea X_1, \dots, X_n una muestra aleatoria de una distribución $\mathcal{P}(\lambda)$. Demostrar que $T = \sum_{i=1}^n X_i$ es un estadístico suficiente para λ :

- (a) Aplicando la definición.
- (b) Aplicando el Teorema de Factorización.

2. Sean X_1, \dots, X_n variables aleatorias independientes. Probar que:

- (a) Si $X_i \sim Bi(n_i, p)$, $1 \leq i \leq n$, con n_i conocidos, entonces $\sum_{i=1}^n X_i$ es suficiente para p .
- (b) Si $X_i \sim \Gamma(\alpha, \lambda)$ entonces $(\prod_{i=1}^n X_i, \sum_{i=1}^n X_i)$ es suficiente para (α, λ) .
Si α es conocido, entonces $\sum_{i=1}^n X_i$ es suficiente para λ .
Si λ es conocido, entonces $\prod_{i=1}^n X_i$ es suficiente para α .
- (c) Si $X_i \sim \beta(r, s)$ entonces $(\prod_{i=1}^n X_i, \prod_{i=1}^n (1 - X_i))$ es suficiente para (r, s) .
Si r es conocido, entonces $\prod_{i=1}^n (1 - X_i)$ es suficiente para s .
Si s es conocido, entonces $\prod_{i=1}^n X_i$ es suficiente para r .
- (d) Si X_i tiene función de probabilidad puntual

$$f(x; \theta, p) = (1 - p)p^{x-\theta} \text{ para } x = \theta, \theta + 1, \theta + 2, \dots$$

con $(\theta, p) \in \mathbb{R} \times (0, 1)$, entonces $(X_{(1)}, \sum_{i=1}^n X_i)$ es suficiente para (θ, p) .

Si p es conocido, entonces $X_{(1)}$ es suficiente para θ .

Si θ es conocido, entonces $\sum_{i=1}^n X_i$ es suficiente para p .

3. Sean X_1, \dots, X_n v.a.i.i.d. $\mathcal{U}(\theta_1, \theta_2)$. Mostrar que $(X_{(1)}, X_{(n)})$ es suficiente para (θ_1, θ_2) .

†4. Sea X_1, \dots, X_n una m.a. de una distribución con densidad

$$f(x; \mu, \sigma) = \frac{1}{\sigma} \exp\left\{-\frac{(x - \mu)}{\sigma}\right\} I_{[\mu, \infty)}(x)$$

con $\mu \in \mathbb{R}$ y $\sigma > 0$.

- (a) Exhibir un estadístico suficiente bidimensional para (μ, σ) .
- (b) Hallar un estadístico suficiente para μ cuando σ es fijo y conocido.
- (c) Hallar un estadístico suficiente para σ cuando μ es fijo y conocido.

†5. Sea X_1, \dots, X_n una muestra aleatoria de una distribución P_θ discreta o absolutamente continua. Supóngase que $T(\mathbf{X})$ es un estadístico suficiente para θ . Demostrar que el EMV de θ depende de \mathbf{X} sólo a través de $T(\mathbf{X})$.

B) Teorema de Rao-Blackwell

1. Sea X_1, \dots, X_n una muestra aleatoria de una distribución $Bi(1, \theta)$. Luego, $\delta(\mathbf{X}) = X_1$ es un estimador insesgado de θ y $T(\mathbf{X}) = \sum_{i=1}^n X_i$ es un estadístico suficiente.
 - (a) Usando el Teorema de Rao-Blackwell, hallar un estimador insesgado $\delta^*(T)$ que sea mejor que δ .
 - (b) Probar que $V_\theta(\delta^*) < V_\theta(\delta) \quad \forall \theta$ si $n > 1$.
2. Sea X_1, \dots, X_n una m.a. de una distribución $\mathcal{P}(\lambda)$ y $T = \sum_{i=1}^n X_i$ el estadístico suficiente.
 - (a) Sea $\mu = e^{-\lambda}$. Mostrar que $\hat{\mu} = I\{X_1 = 0\}$ es un estimador insesgado de μ .
 - (b) Aplicar el Teorema de Rao-Blackwell para obtener un estimador insesgado $\delta^*(T)$ mejor que $\hat{\mu}$ y comparar los ECM de ambos estimadores.
3. Sea X_1, \dots, X_n una m.a. de una distribución $Bi(1, \theta)$. Dados m y k tales que $k \leq m < n$, se quiere estimar $q(\theta) = \binom{m}{k} \theta^k (1 - \theta)^{m-k}$. Sea $S = \sum_{i=1}^m X_i$ y $h(S) = I\{S = k\}$.
 - (a) Probar que $h(S)$ es un estimador insesgado de $q(\theta)$.
 - (b) Construir un estimador insesgado de $q(\theta)$ mejor que $h(S)$.
- † 4. Sea X_1, \dots, X_n una m.a. de una distribución $N(\mu, 1)$ y $\xi \in \mathbb{R}$ un número fijo y conocido. Se desea estimar $p = P(X_1 \leq \xi)$.
 - (a) Mostrar que $I\{X_1 \leq \xi\}$ es un estimador insesgado de p .
 - (b) A partir de $T = \bar{X}$, construir otro estimador insesgado $\delta^*(T)$ mejor que el anterior.
Sugerencia: probar y usar que \bar{X} y $X_1 - \bar{X}$ son independientes.

C) Familias exponenciales

1. Mostrar que las siguientes familias de distribuciones son exponenciales. En cada caso, hacer una elección explícita de $a(\theta)$, $h(\mathbf{x})$, $c_j(\theta)$ y $t_j(\mathbf{x})$ y exhibir un estadístico suficiente para θ .
 - (a) $\mathcal{P}(\theta)$; $\theta > 0$.
 - (b) $N(\mu, \sigma^2)$; $\theta = (\mu, \sigma^2)$, con $\mu \in \mathbb{R}$ y $\sigma^2 > 0$.
 - (c) $\Gamma(\alpha, \lambda)$; $\theta = (r, \lambda)$, con $\alpha, \lambda > 0$.
 - (d) $\mathcal{M}(n, \theta_1, \dots, \theta_k)$; $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_k)$, con $0 < \theta_j < 1$, $\sum_{j=1}^k \theta_j = 1$ y n conocido.
 - (e) $BN(r, \theta)$; $0 < \theta < 1$ y r conocido.
 - (f) $\beta(r, s)$; $\theta = (r, s)$, con $r, s > 0$.
2. Sea $\{f(x; \theta) : \theta \in \Theta\}$ una familia exponencial. Probar que el soporte de $f(x; \theta)$ no depende de θ . Mostrar que la familia $\{\mathcal{U}(0, \theta) : \theta > 0\}$ no es exponencial.

D) Completitud y estimadores IMVU

1. Analizar si los estadísticos suficientes hallados en los ejercicios 1 y 2 de la parte A) son completos.
2. Sea X_1, \dots, X_n una muestra aleatoria de una distribución $N(\mu, 1)$.
 - (a) Mostrar que $T = (X_1, \sum_{i=2}^n X_i)$ es suficiente para μ pero no completo.
 - (b) Hallar un estadístico completo y un estimador IMVU de μ .
3. Sea X_1, \dots, X_n una m.a. de una distribución $\mathcal{U}(0, \theta)$. Probar que $X_{(n)}$ es completo para θ .
4. Sea X_1, \dots, X_n una m.a. de una distribución $Bi(1, \theta)$, con $\theta \in \Theta \subset (0, 1)$.
 - (a) Mostrar que si Θ tiene más de n puntos, el estadístico $T = \sum_{i=1}^n X_i$ es completo.
 - (b) Deducir que \bar{X} es IMVU de θ .
 - (c) Mostrar que $q(\theta) = \theta/(1 - \theta)$ no es estimable mediante un estimador insesgado.
5. Sea X_1, \dots, X_n una m.a. de una distribución $N(\mu, \sigma^2)$.
 - (a) Mostrar que si σ^2 es conocido, \bar{X} es IMVU para μ .
 - (b) Mostrar que si μ es conocido, $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2$ es IMVU para σ^2 .
 - (c) Mostrar que si ambos parámetros son desconocidos, entonces \bar{X} es IMVU para μ y s^2 es IMVU para σ^2 .
6. Sea X_1, \dots, X_n una m.a. de una distribución $\mathcal{E}(\theta)$. Hallar un estimador IMVU de θ .
7. En el ejercicio 2 de la parte B), hallar estimadores IMVU para λ, λ^2 y μ .
8. En el ejercicio 3 de la parte B), hallar un estimador IMVU para $q(\theta)$.
- †9. En el ejercicio 4 de la parte B), hallar un estimador IMVU para p .
- †10. Sean δ_1 y δ_2 dos estimadores IMVU de $q_1(\theta)$ y $q_2(\theta)$ respectivamente, y $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. Demostrar que $c_1\delta_1 + c_2\delta_2$ es IMVU de $c_1q_1(\theta) + c_2q_2(\theta)$.

E) Desigualdad de Rao-Cramer

1. Sea X_1, \dots, X_n una muestra aleatoria de una distribución $Bi(1, \theta)$.
 - (a) Calcular el número de información de Fisher $I_1(\theta)$.
 - (b) Mostrar que \bar{X} alcanza la cota de Rao–Cramer y deducir que es IMVU para θ .
2. Sea X_1, \dots, X_n una m.a. de una distribución $N(\mu, \sigma_0^2)$, con σ_0^2 conocido.
 - (a) Mostrar que \bar{X} es un estimador IMVU para μ , usando la desigualdad de Rao–Cramer.
 - (b) Mostrar que $\bar{X}^2 - \sigma_0^2/n$ es un estimador IMVU de μ^2 , aunque no alcanza la cota de Rao–Cramer.
- †3. Sea X una v.a. con distribución $\mathcal{P}(\lambda)$ y sean μ y $\delta^*(T)$ como en el ejercicio 2 de la parte B). Mostrar que aunque $\delta^*(T)$ es un estimador IMVU de μ , la cota de Rao–Cramer es estrictamente menor que $V_\lambda(\delta^*(T))$.