

¿Cuál es la conjunta?

Sean $Z_1, \dots, Z_p$ variables aleatorias i.i.d. tales $Z_i \sim \mathcal{N}(0, 1)$.

Consideremos el vector aleatorio $\mathbf{Z} = (Z_1, \dots, Z_p)^t$.

¿Cuál es su distribución conjunta?

¿Cuál es la conjunta?

Sean $Z_1, \dots, Z_p$ variables aleatorias i.i.d. tales $Z_i \sim \mathcal{N}(0, 1)$.

Consideremos el vector aleatorio $\mathbf{Z} = (Z_1, \dots, Z_p)^t$.

¿Cuál es su distribución conjunta?

$$\begin{aligned} f(\mathbf{z}) &= f(z_1, z_2, \dots, z_p) = f_1(z_1)f_2(z_2) \dots f_p(z_p) \\ &= \prod_{i=1}^p f_i(z_i) \end{aligned}$$

¿Cuál es la conjunta?

Sean $Z_1, \dots, Z_p$ variables aleatorias i.i.d. tales $Z_i \sim \mathcal{N}(0, 1)$.

Consideremos el vector aleatorio $\mathbf{Z} = (Z_1, \dots, Z_p)^t$.

¿Cuál es su distribución conjunta?

$$\begin{aligned} f(\mathbf{z}) &= f(z_1, z_2, \dots, z_p) = f_1(z_1)f_2(z_2) \dots f_p(z_p) \\ &= \prod_{i=1}^p f_i(z_i) \\ &= \prod_{i=1}^p \frac{1}{(2\pi)^{\frac{1}{2}}} e^{-\frac{1}{2}z_i^2} \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{p}{2}}} e^{-\frac{1}{2} \sum_{i=1}^p z_i^2} \end{aligned}$$

¿Cuál es la conjunta?

Sean $Z_1, \dots, Z_p$ variables aleatorias i.i.d. tales $Z_i \sim \mathcal{N}(0, 1)$.

Consideremos el vector aleatorio $\mathbf{Z} = (Z_1, \dots, Z_p)^t$.

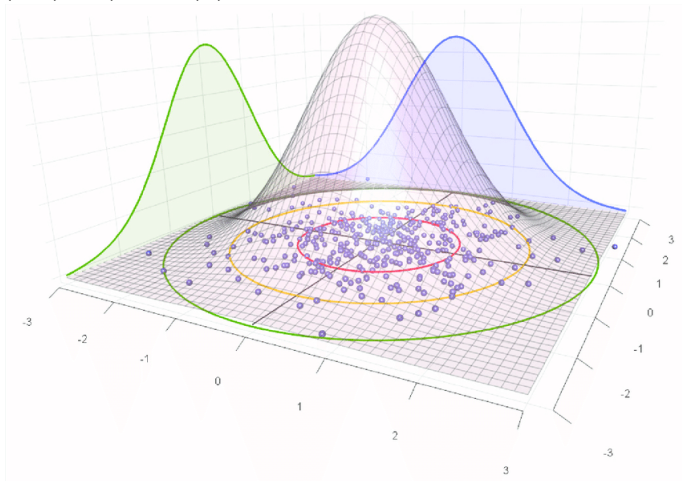
¿Cuál es su distribución conjunta?

$$\begin{aligned} f(\mathbf{z}) &= f(z_1, z_2, \dots, z_p) = f_1(z_1)f_2(z_2) \dots f_p(z_p) \\ &= \prod_{i=1}^p f_i(z_i) \\ &= \prod_{i=1}^p \frac{1}{(2\pi)^{\frac{1}{2}}} e^{-\frac{1}{2}z_i^2} \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{p}{2}}} e^{-\frac{1}{2} \sum_{i=1}^p z_i^2} \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{p}{2}}} e^{-\frac{1}{2} \|\mathbf{z}\|^2} \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{p}{2}}} e^{-\frac{1}{2} \mathbf{z}^t \mathbf{z}} \end{aligned}$$

Normal multivariada: $p = 2$

Por ejemplo la función de densidad de una variables

$$N\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) \text{ en dimensión 2}$$



¿Cuál es la conjunta?

Sean $X_1, \dots, X_p$ variables aleatorias i.i.d. tales $X_i \sim \mathcal{N}(0, \sigma_i^2)$.

$\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_p)^t$ ¿Cuál es su distribución conjunta?

¿Cuál es la conjunta?

Sean $X_1, \dots, X_p$ variables aleatorias i.i.d. tales $X_i \sim \mathcal{N}(0, \sigma_i^2)$.

$\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_p)^t$ ¿Cuál es su distribución conjunta?

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x}) &= \prod_{i=1}^p f_i(x_i) = \prod_{i=1}^p \frac{1}{(2\pi\sigma_i^2)^{\frac{1}{2}}} e^{-\frac{1}{2} \frac{x_i^2}{\sigma_i^2}} \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{p}{2}}} \frac{1}{\prod_{i=1}^p \sigma_i} e^{-\frac{1}{2} \sum_{i=1}^p \frac{x_i^2}{\sigma_i^2}} \end{aligned}$$

¿Cuál es la conjunta?

Sean $X_1, \dots, X_p$ variables aleatorias i.i.d. tales $X_i \sim \mathcal{N}(0, \sigma_i^2)$.

$\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_p)^t$ ¿Cuál es su distribución conjunta?

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x}) &= \prod_{i=1}^p f_i(x_i) = \prod_{i=1}^p \frac{1}{(2\pi\sigma_i^2)^{\frac{1}{2}}} e^{-\frac{1}{2} \frac{x_i^2}{\sigma_i^2}} \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{p}{2}}} \frac{1}{\prod_{i=1}^p \sigma_i} e^{-\frac{1}{2} \sum_{i=1}^p \frac{x_i^2}{\sigma_i^2}} \end{aligned}$$

para $\Delta = \text{diag}(\sigma_1^2, \dots, \sigma_p^2)$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{p}{2}}} \frac{1}{\prod_{i=1}^p \sigma_i} e^{-\frac{1}{2} \mathbf{x}^t \Delta^{-1} \mathbf{x}} = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{p}{2}}} \frac{1}{|\Delta|^{\frac{1}{2}}} e^{-\frac{1}{2} \mathbf{x}^t \Delta^{-1} \mathbf{x}}$$

$$\mathbf{X} \sim \mathcal{N}(\mathbf{0}, \Delta)$$

¿Cuál es la conjunta?

$X_1, \dots, X_p$ variables aleatorias i.i.d. tales $X_i \sim \mathcal{N}(\mu_i, \sigma_i^2)$.

$\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_p)^t$ ¿Cuál es su distribución conjunta?

¿Cuál es la conjunta?

$X_1, \dots, X_p$ variables aleatorias i.i.d. tales $X_i \sim \mathcal{N}(\mu_i, \sigma_i^2)$.

$\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_p)^t$ ¿Cuál es su distribución conjunta?

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x}) &= \prod_{i=1}^p \frac{1}{(2\pi\sigma_i^2)^{\frac{1}{2}}} e^{-\frac{1}{2} \frac{(x_i - \mu_i)^2}{\sigma_i^2}} \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{p}{2}}} \frac{1}{\prod_{i=1}^p \sigma_i} e^{-\frac{1}{2} \sum_{i=1}^p \frac{(x_i - \mu_i)^2}{\sigma_i^2}} \end{aligned}$$

¿Cuál es la conjunta?

$X_1, \dots, X_p$ variables aleatorias i.i.d. tales $X_i \sim \mathcal{N}(\mu_i, \sigma_i^2)$.

$\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_p)^t$ ¿Cuál es su distribución conjunta?

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x}) &= \prod_{i=1}^p \frac{1}{(2\pi\sigma_i^2)^{\frac{1}{2}}} e^{-\frac{1}{2} \frac{(x_i - \mu_i)^2}{\sigma_i^2}} \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{p}{2}}} \frac{1}{\prod_{i=1}^p \sigma_i} e^{-\frac{1}{2} \sum_{i=1}^p \frac{(x_i - \mu_i)^2}{\sigma_i^2}} \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{p}{2}}} \frac{1}{|\mathbf{\Delta}|^{\frac{1}{2}}} e^{-\frac{1}{2} (\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})^t \mathbf{\Delta}^{-1} (\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})} \end{aligned}$$

para $\boldsymbol{\mu} = (\mu_1, \dots, \mu_p)^t$

$$\mathbf{X} \sim \mathcal{N}(\boldsymbol{\mu}, \mathbf{\Delta})$$

En general: Normal Multivariada

Sean $\boldsymbol{\mu} \in \mathbb{R}^p$ y $\boldsymbol{\Sigma} \in \mathbb{R}^{p \times p}$ **simétrica y definida positiva**

Se dice que $\mathbf{X} \sim \mathcal{N}(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$ si su densidad está dada por

$$f(\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{p}{2}}} \frac{1}{|\boldsymbol{\Sigma}|^{\frac{1}{2}}} e^{-\frac{1}{2}(\mathbf{x}-\boldsymbol{\mu})^t \boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\mathbf{x}-\boldsymbol{\mu})}$$

En general: Normal Multivariada

Sean $\boldsymbol{\mu} \in \mathbb{R}^p$ y $\boldsymbol{\Sigma} \in \mathbb{R}^{p \times p}$ **simétrica y definida positiva**

Se dice que $\mathbf{X} \sim \mathcal{N}(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$ si su densidad está dada por

$$f(\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{p}{2}}} \frac{1}{|\boldsymbol{\Sigma}|^{\frac{1}{2}}} e^{-\frac{1}{2}(\mathbf{x}-\boldsymbol{\mu})^t \boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\mathbf{x}-\boldsymbol{\mu})}$$

Nota: la densidad conjunta depende de $\mathbf{x}$ a través de

$$D^2 = (\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})^t \boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})$$

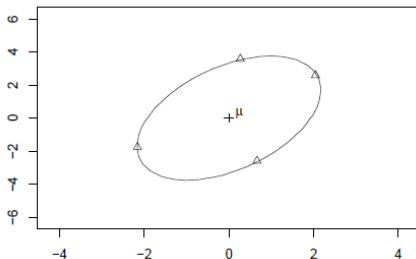
cuadrado de la **distancia de Mahalanobis**

Distancia de Mahalanobis

- La distancia de Mahalanobis de un punto $\mathbf{x}$ a la media $\boldsymbol{\mu}$ es D siendo

$$D^2 = (\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})^t \boldsymbol{\Sigma}^{-1} (\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})$$

- De esta forma, dos puntos tienen la misma distancia de Mahalanobis si están en el mismo elipsoide centrado en $\boldsymbol{\mu}$



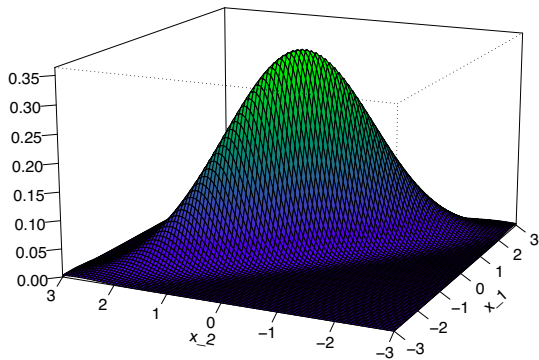
Caso $p = 2$

- Sea $\boldsymbol{\mu} = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ y $\boldsymbol{\Sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \rho\sigma_1\sigma_2 \\ \rho\sigma_1\sigma_2 & \sigma_2^2 \end{pmatrix}$ definida positiva ($|\rho| \neq 1$)

$$f(\mathbf{x}) = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{\sigma_1\sigma_2(1-\rho^2)^{\frac{1}{2}}} \exp \left\{ -\frac{1}{2(1-\rho^2)} \left[\left(\frac{x_1 - \mu_1}{\sigma_1} \right)^2 + \left(\frac{x_2 - \mu_2}{\sigma_2} \right)^2 - 2\rho \left(\frac{x_1 - \mu_1}{\sigma_1} \right) \left(\frac{x_2 - \mu_2}{\sigma_2} \right) \right] \right\}$$

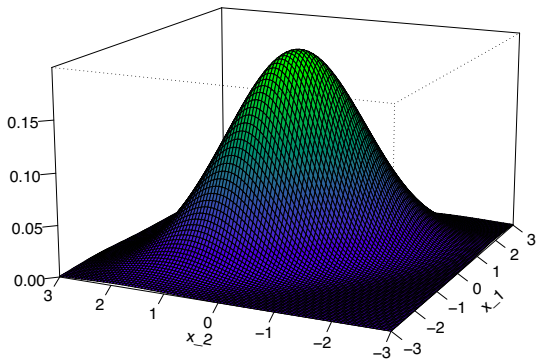
Caso $p=2$

$\rho = -0.8991$



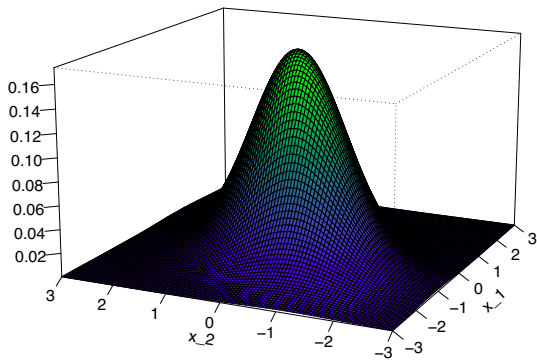
Caso $p=2$

$\rho = -0.5994$



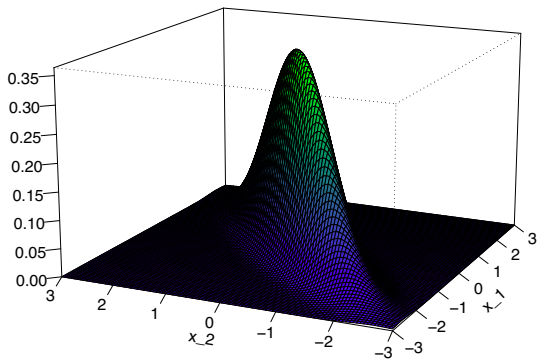
Caso $p=2$

$\rho = 0.3996$



Caso $p=2$

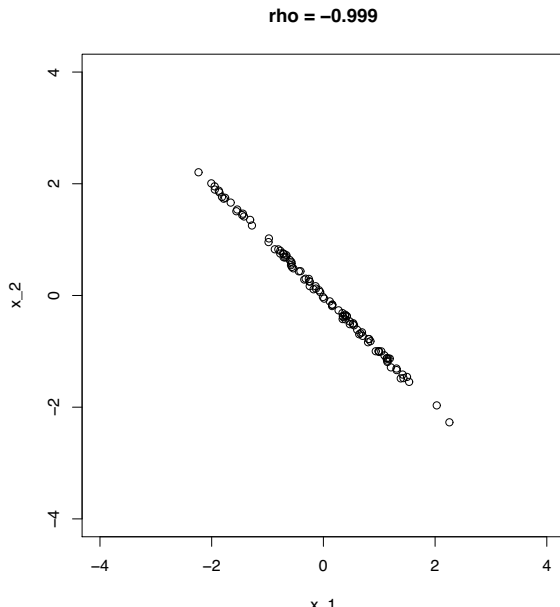
$\rho = 0.8991$



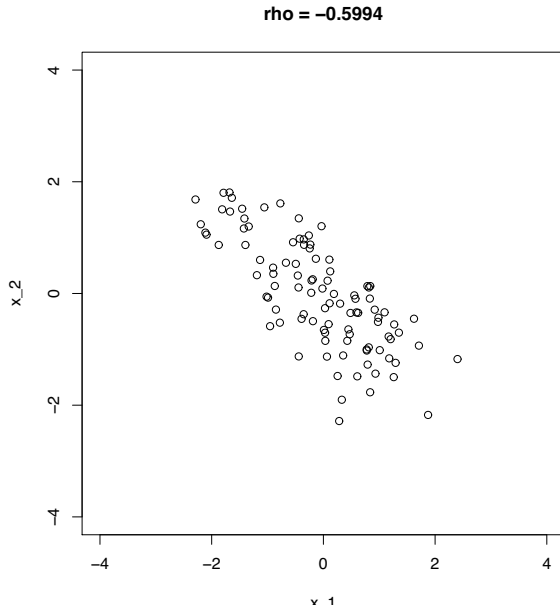
Caso $p=2$

Ahora vamos a muestrear de estas distribuciones.

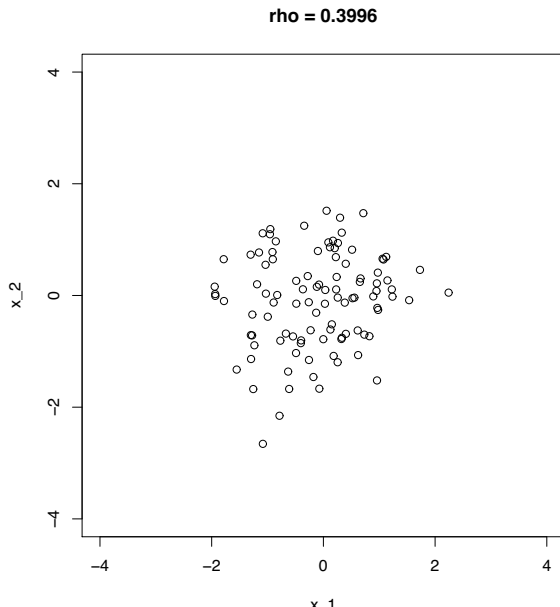
Caso $p=2$



Caso $p=2$



Caso $p=2$



Caso $p=2$

