

Comportamiento Asintótico

Sea $\mathcal{P} = \{P_{\theta}, \theta \in \Theta\}$ una familia de distribuciones.

Supongamos que para cada n se tiene un estimador $\delta_n(X_1, \dots, X_n)$ de $q(\theta)$ basado en una muestra aleatoria de tamaño n .

Def. $\delta_n(X_1, \dots, X_n)$ es una sucesión fuertemente consistente de estimadores de $q(\theta)$ si

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \delta_n(X_1, \dots, X_n) = q(\theta) \quad c.t.p.$$

o sea si $P_{\theta}(\delta_n(X_1, \dots, X_n) \rightarrow q(\theta)) = 1$ para todo $\theta \in \Theta$.

Sea $\mathcal{P} = \{P_\theta, \theta \in \Theta\}$ una familia de distribuciones.

Supongamos que para cada n se tiene un estimador $\delta_n(X_1, \dots, X_n)$ de $q(\theta)$ basado en una muestra aleatoria de tamaño n .

Def. $\delta_n(X_1, \dots, X_n)$ es una sucesión fuertemente consistente de estimadores de $q(\theta)$ si

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \delta_n(X_1, \dots, X_n) = q(\theta) \quad c.t.p.$$

o sea si $P_\theta(\delta_n(X_1, \dots, X_n) \rightarrow q(\theta)) = 1$ para todo $\theta \in \Theta$.

Def. $\delta_n(X_1, \dots, X_n)$ es una sucesión débilmente consistente de estimadores de $q(\theta)$ si

$$\delta_n(X_1, \dots, X_n) \xrightarrow{P} q(\theta)$$

o sea, si para todo $\varepsilon > 0$ y $\theta \in \Theta$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P_\theta(|\delta_n(X_1, \dots, X_n) - q(\theta)| > \varepsilon) = 0.$$

Propiedades

Error Cuadrático Medio

Sea, para todo n , $\delta_n = \delta_n(X_1, \dots, X_n)$ un estimador de $q(\theta)$ basado en una muestra aleatoria de tamaño n .

Prop. Si $ECM_{\theta}(\delta_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$, entonces δ_n es débilmente consistente de $q(\theta)$.

Demostración.

Dado $\epsilon > 0$, por la desigualdad de Markov:

$$P(|\delta_n - q(\theta)| > \epsilon) \leq \frac{E_{\theta}((\delta_n - q(\theta))^2)}{\epsilon^2} = \frac{ECM_{\theta}(\delta_n)}{\epsilon^2}$$

Propiedades

Teorema. Sea, para todo n , $\delta_n = \delta_n(X_1, \dots, X_n)$ un estimador de $q(\theta)$ basado en una muestra aleatoria de tamaño n . Si

- $\text{VAR}_{\theta}(\delta_n) \rightarrow 0$
- $\mathbb{E}_{\theta}(\delta_n) \rightarrow q(\theta)$,

entonces $\delta_n(X_1, \dots, X_n)$ es débilmente consistente para $q(\theta)$.

Consistencia de los estimadores de los momentos

- Sea X_1, \dots, X_n una muestra aleatoria de una distribución perteneciente a la familia $\mathcal{P} = \{P_\theta, \theta \in \Theta \subset \mathbb{R}\}$,
- $g(x)$ una función continua con valores en \mathbb{R}
- Supongamos que $M(\theta) = \mathbb{E}_\theta(g(X_1))$ es, como función de θ , continua y estrictamente monótona.

Sea el estimador de momentos $\hat{\theta}_n$ definido como la solución de

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n g(X_i) = M(\hat{\theta}_n) = \mathbb{E}_{\hat{\theta}_n}(g(X_1)). \quad (1)$$

Luego con probabilidad 1 existe n_0 tal que para todo $n \geq n_0$ la ecuación (1) tiene una solución, $\hat{\theta}_n$, y $\hat{\theta}_n$ es fuertemente consistente para θ .

Consistencia de los Estimadores de Máxima Verosimilitud

Sea X_1, \dots, X_n i.i.d. $X_i \sim f(x, \theta)$ con $\theta \in \Theta$, donde Θ es un intervalo abierto de \mathbb{R} .

Supongamos que:

- $f(x, \theta)$ es derivable respecto de θ
- el conjunto $\mathcal{S} = \{x : f(x, \theta) \neq 0\}$ es independiente de θ .
- $\theta_1 \neq \theta_2$ implica que $f(x, \theta_1) \neq f(x, \theta_2)$.

Sea $\hat{\theta}_n$ el estimador de máxima verosimilitud de θ , que satisface

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial \log f(x_i, \hat{\theta}_n)}{\partial \theta} = 0 \quad (2)$$

Supongamos además que la ecuación (2) tiene a lo sumo una solución. Entonces,

$$\hat{\theta}_n \xrightarrow{a.s.} \theta$$

o sea, $\hat{\theta}_n$ es una sucesión de estimadores fuertemente consistente.

Lema Previo

Sean p y q dos densidades o dos funciones de densidad discretas o continuas distintas. Luego se tiene:

$$\mathbb{E}_p \left[\log \left(\frac{q(X)}{p(X)} \right) \right] < 0$$

donde \mathbb{E}_p significa que se calcula la esperanza considerando que X tiene una distribución discreta o continua cuya densidad o probabilidad puntual es p .

Estimadores asintóticamente normales

Sea $\mathcal{P} = \{P_{\theta}, \theta \in \Theta\}$ una familia de distribuciones.

Supongamos que para cada n se tiene un estimador $\delta_n(X_1, \dots, X_n)$ de $q(\theta)$ basado en una muestra aleatoria de tamaño n .

Estimadores asintóticamente normales

Sea $\mathcal{P} = \{P_{\theta}, \theta \in \Theta\}$ una familia de distribuciones.

Supongamos que para cada n se tiene un estimador $\delta_n(X_1, \dots, X_n)$ de $q(\theta)$ basado en una muestra aleatoria de tamaño n .

Definición 1. Diremos que $\delta_n(X_1, \dots, X_n)$ es una sucesión de *estimadores asintóticamente normal* si

$$\sqrt{n}(\delta_n(X_1, \dots, X_n) - q(\theta)) \xrightarrow{D} N(0, \sigma^2(\theta)) \quad (3)$$

Propiedad: Método Delta

Sea $\{Z_n\}_{n \geq 1}$, una sucesión de variables aleatorias tales que

$$\sqrt{n}(Z_n - \lambda) \xrightarrow{D} N(0, \sigma^2) .$$

Sea $H : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función de clase \mathcal{C}^1 tal que $H'(\lambda) \neq 0$.

Entonces

$$\sqrt{n}(H(Z_n) - H(\lambda)) \xrightarrow{D} N\left(0, \sigma^2 [H'(\lambda)]^2\right) .$$

Dist. Asint. de los Estimadores de Momentos

- Sea X_1, \dots, X_n una muestra aleatoria de una distribución perteneciente a la familia $\mathcal{P} = \{P_\theta, \theta \in \Theta \subset \mathbb{R}\}$,
- Supongamos que $M(\theta) = \mathbb{E}_\theta(g(X_1))$ es, tal que $M : \Theta \rightarrow \Lambda$ es estrictamente monótona.
Sea $H : \Lambda \rightarrow \Theta$ su inversa, $H(t) = M^{-1}(t)$.
- Supongamos que H es continuamente diferenciable y tal que $H'(\mu) \neq 0$ donde $\mu = M(\theta)$

Sea el estimador de momentos $\hat{\theta}_n$ definido como la solución de (1)

Entonces,

$$\sqrt{n}(\hat{\theta}_n - \theta) \xrightarrow{D} N\left(0, (H'(\mu))^2 \text{VAR}_\theta g(X_1)\right)$$

Teorema

Supongamos que $\mathbf{X}_1, \dots, \mathbf{X}_n$ son i.i.d. $\mathbf{X}_i \sim f(\mathbf{x}, \theta)$, con

- $\theta \in \Theta \subset \mathbb{R}$,
- Θ abierto

y que se cumple

- (A) El conjunto $\mathcal{S} = \{\mathbf{x} : f(\mathbf{x}, \theta) > 0\}$ es independiente de θ .
(B) Para todo \mathbf{x} , $f(\mathbf{x}, \theta)$ es tres veces derivable respecto de θ y

$$\frac{\partial^3 f(\mathbf{x}, \theta)}{\partial \theta^3}$$

es continua en θ .

- (C) Si $h(\mathbf{X})$ es un estadístico tal que $\mathbb{E}_\theta |h(\mathbf{X})| < \infty$ para todo $\theta \in \Theta$ entonces $g(\theta) = \int h(\mathbf{x})f(\mathbf{x}, \theta)d\mathbf{x}$ es dos veces diferenciable y para $s = 1, 2$

$$\frac{\partial^s}{\partial \theta^s} \int h(\mathbf{x})f(\mathbf{x}, \theta)d\mathbf{x} = \int h(\mathbf{x}) \frac{\partial^s f(\mathbf{x}, \theta)}{\partial \theta^s} d\mathbf{x}$$

Teorema

(D) $0 < I_1(\theta) = \mathbb{E}_\theta \left(\frac{\partial \log f(\mathbf{X}, \theta)}{\partial \theta} \right)^2 < \infty$

(E) Existe $K > 0$ tal que

$$\left| \frac{\partial^3 \log f(\mathbf{x}, \theta)}{\partial \theta^3} \right| = \left| \frac{\partial^2 \psi(\mathbf{x}, \theta)}{\partial \theta^2} \right| \leq K$$

para todo $\mathbf{x} \in \mathcal{S}$ y para todo $\theta \in \Theta$

Teorema

Sean

- $\hat{\theta}_n$ un estimador de máxima verosimilitud de θ consistente y
- $q(\theta)$ derivable con $q'(\theta) \neq 0$ para todo θ .

Entonces, $q(\hat{\theta}_n)$ es asintóticamente normal para estimar $q(\theta)$, o sea,

$$\sqrt{n} \left(q(\hat{\theta}_n) - q(\theta) \right) \xrightarrow{D} N \left(0, \frac{[q'(\theta)]^2}{I_1(\theta)} \right)$$