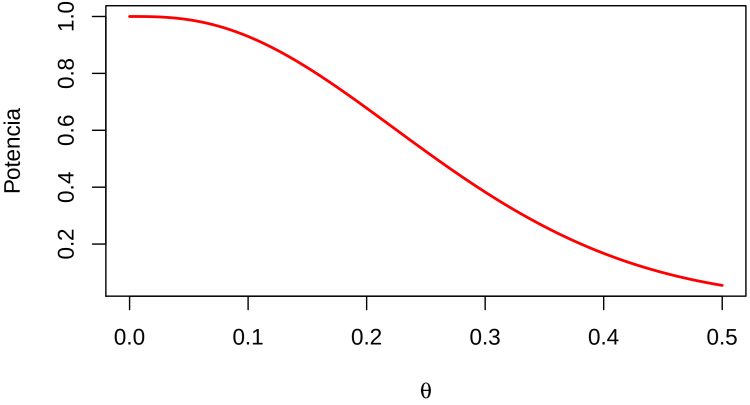
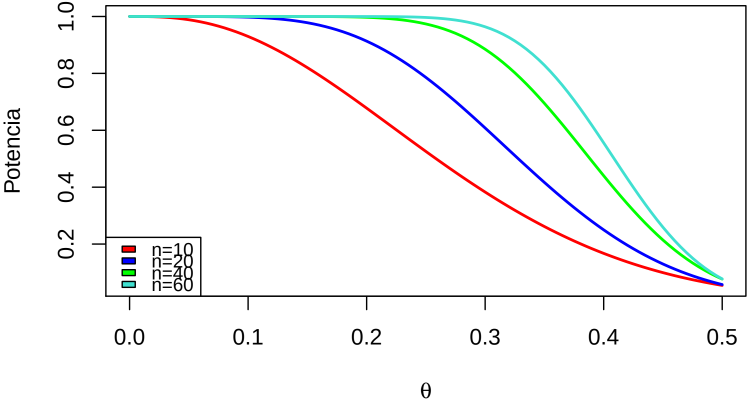
Función de Potencia



Función de Potencia



Nivel de significación

- $\mathbf{X} \sim F(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}) \quad H_0 : \boldsymbol{\theta} \in \Theta_0 \qquad H_1 : \boldsymbol{\theta} \in \Theta_1$

- El *nivel de significación* de un test ϕ:

$$\alpha = \sup_{\boldsymbol{\theta} \in \Theta_0} \beta_\phi(\boldsymbol{\theta})$$

- ϕ es el test *más potente* de nivel menor o igual que α para una alternativa fija $\boldsymbol{\theta}_1 \in \Theta_1$ si

  (a) $\sup_{\boldsymbol{\theta} \in \Theta_0} \beta_\phi(\boldsymbol{\theta}) \leq \alpha$

  (b) Dado ϕ^* de nivel menor o igual que α se tiene

$$\beta_{\phi^*}(\boldsymbol{\theta}_1) \leq \beta_\phi(\boldsymbol{\theta}_1)$$

Nivel Crítico o p–valor

El *nivel crítico o p-valor* da la probabilidad de obtener evidencia en contra de la hipótesis nula bajo el supuesto de que ésta sea cierta.

El *nivel crítico o p-valor* es el menor valor de significación para el que rechazamos la hipótesis H_0 para una observación dada $\mathbf{x}$.

NO es la probabilidad de H_0 sea cierta.

TEST UMP

- ϕ es un test *uniformemente más potente*, **UMP**, de nivel menor o igual que α para

$$H_0 : \boldsymbol{\theta} \in \Theta_0 \qquad\qquad H_1 : \boldsymbol{\theta} \in \Theta_1$$

si

(a) $\sup_{\boldsymbol{\theta} \in \Theta_0} \beta_\phi(\boldsymbol{\theta}) \leq \alpha$

(b) Dado ϕ^* de nivel menor o igual que α se tiene

$$\beta_{\phi^*}(\boldsymbol{\theta}_1) \leq \beta_\phi(\boldsymbol{\theta}_1) \qquad\qquad \boldsymbol{\theta}_1 \in \Theta_1$$

Teorema de Neyman Pearson

Comencemos por el caso más sencillo:

Θ_0 y Θ_1 son hipótesis simples y que $\mathbf{X}$ tiene distribución discreta: $p(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta})$ es una f.p.p.

Teorema de Neyman Pearson

Comencemos por el caso más sencillo:

Θ_0 y Θ_1 son hipótesis simples y que $\mathbf{X}$ tiene distribución discreta: $p(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta})$ es una f.p.p.

$$H_0 : \boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\theta}_0 \qquad H_1 : \boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\theta}_1$$

Parece Razonable rechazar H_0 si $p(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}_1)$ es mayor que $p(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}_0)$. Es decir si

$$\frac{p(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}_1)}{p(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}_0)} > k_\alpha$$

donde k_α se elegirá de manera de alcanzar el nivel deseado α.

Teorema de Neyman Pearson: un ejemplo

x	0	1	2
$p(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}_0)$	0.05	0.05	0.90
$p(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}_1)$	0.90	0.08	0.02

Queremos construir un test de nivel 0.05.

Teorema de Neyman Pearson: un ejemplo

x	0	1	2
$p(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}_0)$	0.05	0.05	0.90
$p(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}_1)$	0.90	0.08	0.02

Queremos construir un test de nivel 0.05.

1. La región crítica $\mathcal{R} = \{0\}$ tiene nivel 0.05
2. La región crítica $\mathcal{R}^* = \{1\}$ tiene nivel 0.05
3. ¿Alguno de los dos tests es mejor que el otro?

La región $\mathcal{R}$ es preferible a la $\mathcal{R}^*$ cuando analizamos que ocurre con la probabilidad de rechazar H_0 si $\theta = \theta_1$:

Teorema de Neyman Pearson: un ejemplo

x	0	1	2
$p(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}_0)$	0.05	0.05	0.90
$p(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}_1)$	0.90	0.08	0.02

Queremos construir un test de nivel 0.05.

1. La región crítica $\mathcal{R} = \{0\}$ tiene nivel 0.05
2. La región crítica $\mathcal{R}^* = \{1\}$ tiene nivel 0.05
3. ¿Alguno de los dos tests es mejor que el otro?

La región $\mathcal{R}$ es preferible a la $\mathcal{R}^*$ cuando analizamos que ocurre con la probabilidad de rechazar H_0 si $\theta = \theta_1$:

$\mathbb{E}_{\theta_1}(\phi)(X) = 0.90$

$\mathbb{E}_{\theta_1}(\phi^*)(X) = 0.08$

Tenemos que: $\dfrac{0.90}{0.05} = 18 \quad \dfrac{0.08}{0.05} = 1.6$

Teorema de Neyman Pearson

$$H_0 : \boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\theta}_0 \qquad H_1 : \boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\theta}_1$$

$\mathbf{X}$ es un vector discreto (o continuo) bajo $\boldsymbol{\theta}_0$ y $\boldsymbol{\theta}_1$.
Las densidades o f.p.p correspondientes son $f(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}_0)$ y $f(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}_1)$.

Teorema de Neyman Pearson

$$H_0 : \boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\theta}_0 \qquad H_1 : \boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\theta}_1$$

$\mathbf{X}$ es un vector discreto (o continuo) bajo $\boldsymbol{\theta}_0$ y $\boldsymbol{\theta}_1$.
Las densidades o f.p.p correspondientes son $f(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}_0)$ y $f(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}_1)$.

$$L = \frac{f(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}_1)}{f(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}_0)}$$

Teorema de Neyman Pearson

$$H_0 : \boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\theta}_0 \qquad H_1 : \boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\theta}_1$$

$\mathbf{X}$ es un vector discreto (o continuo) bajo $\boldsymbol{\theta}_0$ y $\boldsymbol{\theta}_1$.
Las densidades o f.p.p correspondientes son $f(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}_0)$ y $f(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}_1)$.

$$L = \frac{f(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}_1)}{f(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}_0)} \geq k_\alpha$$

Teorema de Neyman Pearson

$$H_0 : \boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\theta}_0 \qquad H_1 : \boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\theta}_1$$

$\mathbf{X}$ es un vector discreto (o continuo) bajo $\boldsymbol{\theta}_0$ y $\boldsymbol{\theta}_1$.
Las densidades o f.p.p correspondientes son $f(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}_0)$ y $f(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}_1)$.

$$L = \frac{f(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}_1)}{f(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}_0)} \geq k_\alpha$$

$$\phi(\mathbf{X}) = \begin{cases} 1 & \text{si } f(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}_1) > k_\alpha\, f(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}_0) \\ \gamma_\alpha & \text{si } f(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}_1) = k_\alpha\, f(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}_0) \\ 0 & \text{si } f(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}_1) < k_\alpha\, f(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}_0) \end{cases} \tag{1}$$

Teorema de Neyman Pearson

(i) Dado $0 < \alpha \leq 1$ se pueden elegir k_α y γ_α, $0 \leq \gamma_\alpha \leq 1$, tales que el test (1) satisfaga $\beta_\phi(\boldsymbol{\theta}_0) = \alpha$.
Si $\alpha = 0$ el test

$$\phi(\mathbf{X}) = \begin{cases} 1 & \text{si } f(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}_0) = 0 \\ 0 & \text{si } f(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}_0) > 0 \end{cases} \tag{2}$$

tiene nivel 0.

(ii) Sea ϕ un test de la forma (1) que satisface $\beta_\phi(\boldsymbol{\theta}_0) = \alpha$ para $\alpha > 0$ y de la forma (2) para $\alpha = 0$. Luego ϕ es el más potente de nivel menor o igual que α para

$$H_0 : \boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\theta}_0 \qquad \text{contra} \qquad H_1 : \boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\theta}_1$$

Teorema de Neyman Pearson

(iii) Si ϕ^* es un UMP de nivel $\alpha > 0$ para

$$H_0 : \boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\theta}_0 \qquad \text{contra} \qquad H_1 : \boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\theta}_1$$

entonces ϕ^* es de la forma

$$\phi^*(\mathbf{X}) = \begin{cases} 1 & \text{si } f(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}_1) > k_\alpha\, f(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}_0) \\ \gamma_\alpha(\mathbf{x}) & \text{si } f(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}_1) = k_\alpha\, f(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}_0) \\ 0 & \text{si } f(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}_1) < k_\alpha\, f(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}_0) \end{cases} \qquad (3)$$

excepto en $\mathcal{N}$ tal que $\mathbb{P}_{\boldsymbol{\theta}_0}(\mathcal{N}) = \mathbb{P}_{\boldsymbol{\theta}_1}(\mathcal{N}) = 0$.

(iv) Si ϕ^* es un UMP de nivel 0 para

$$H_0 : \boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\theta}_0 \qquad \text{contra} \qquad H_1 : \boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\theta}_1$$

entonces ϕ^* es de la forma (2) excepto en $\mathcal{N}$ tal que $\mathbb{P}_{\boldsymbol{\theta}_0}(\mathcal{N}) = \mathbb{P}_{\boldsymbol{\theta}_1}(\mathcal{N}) = 0$.

i)

1. Si $\alpha = 0$ es fácil ver que el test dado en (2) tiene el nivel deseado.
2. Si $0 < \alpha \leq 1$ extendemos

$$\tilde{L}(\mathbf{X}) = \begin{cases} \dfrac{f(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}_1)}{f(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}_0)} & \text{si } f(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}_0) > 0 \\ 1 & \text{si } f(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}_0) = 0 \end{cases}$$

$$\mathbb{E}_{\boldsymbol{\theta}_0}(\phi(\mathbf{X})) = 1.P_{\boldsymbol{\theta}_0}(\tilde{L} > k_\alpha) + \gamma_\alpha P_{\boldsymbol{\theta}_0}(\tilde{L} = k_\alpha)$$

Analicemos dos situaciones:

a) existe k_0 tal que $P_{\boldsymbol{\theta}_0}(\tilde{L} \leq k_0) = 1 - \alpha$

b) existe k_0 tal que $P_{\boldsymbol{\theta}_0}(\tilde{L} < k_0) \leq 1 - \alpha < P_{\boldsymbol{\theta}_0}(\tilde{L} \leq k_0)$ y $P_{\boldsymbol{\theta}_0}(\tilde{L} = k_0) > 0$

ii) Veamos el caso continuo.

q.v.q si ϕ^* es un test de nivel menor o igual que α, entonces

$$\mathbb{E}_{\boldsymbol{\theta}_1}(\phi(\mathbf{X})) \geq \mathbb{E}_{\boldsymbol{\theta}_1}(\phi^*(\mathbf{X}))$$

1. Sea $0 < \alpha \leq 1$. Definamos la v.a.

$$U(\mathbf{X}) = (\phi(\mathbf{X})) - \phi^*(\mathbf{X}))(f(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}_1) - k_\alpha f(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}_0))$$

   Probemos que $U(\mathbf{X}) \geq 0$.

2. Sea $\alpha = 0$.
   Como $\mathbb{E}_{\boldsymbol{\theta}_0}(\phi^*(\mathbf{X})) = 0 \Rightarrow \phi^* = 0$ en $\{x : f(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}_0) > 0\}$ salvo en un conjunto de medida nula.
   Calculemos

$$\mathbb{E}_{\boldsymbol{\theta}_1}(\phi(\mathbf{X})) - \mathbb{E}_{\boldsymbol{\theta}_1}(\phi^*(\mathbf{X}))$$

iii)

Sea $0 < \alpha \leq 1$. Como ϕ y ϕ^* son UMP de nivel α

$$\mathbb{E}_{\boldsymbol{\theta}_0}(\phi(\mathbf{X})) = \mathbb{E}_{\boldsymbol{\theta}_0}(\phi^*(\mathbf{X}))$$
$$\mathbb{E}_{\boldsymbol{\theta}_1}(\phi(\mathbf{X})) = \mathbb{E}_{\boldsymbol{\theta}_1}(\phi^*(\mathbf{X}))$$

Veamos que $U(\mathbf{X}) = 0$ salvo en un conjunto $\mathcal{N}$, de medida 0 .

Luego, salvo en $\mathcal{N}$

$$(\phi(\mathbf{X})) - \phi^*(\mathbf{X}))(f(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}_1) - k_\alpha f(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}_0)) = 0$$

por lo tanto,

$\phi = \phi^*$ en el conjunto $\{f(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}_1) \neq k_\alpha f(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}_0)\} \cap \mathcal{N}^c$

iv) Sea $0 = \alpha$.

Vimos que $\phi^* = 0$ en $\{x : f(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}_0) > 0\}$, salvo en un conjunto $\mathcal{N}_1$ de medida nula.

Luego, $\phi = \phi^*$ en $\{x : f(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}_0) > 0\} - \mathcal{N}_1$

¿Qué pasa en $\{x : f(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}_0) = 0\}$?

Veamos que

$$0 = \mathbb{E}_{\boldsymbol{\theta}_1}(\phi(\mathbf{X})) - \mathbb{E}_{\boldsymbol{\theta}_1}(\phi^*(\mathbf{X})) = \int_{\{x : f(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}_0) = 0\}} (1 - \phi^*(\mathbf{x})) f(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}_1) d\mathbf{x}$$

entonces $\phi^* = 1$ en $\{x : f(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}_0) = 0\} \cap \{x : f(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}_1) > 0\}$ salvo un conjunto $\mathcal{N}_2$ de medida nula y en $\{x : f(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}_0) = f(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}_1) = 0\})$

Luego, $\phi^* = \phi$ en un conjunto de probabilidad 1 bajo $\boldsymbol{\theta}_0$ y $\boldsymbol{\theta}_1$.

Ejemplos

x	1	2	3	4	5
$p(x,\theta_0)$	0.94	0.01	0.01	0.02	0.02
$p(x,\theta_1)$	0.02	0.04	0.15	0.35	0.44

$$H_0 : \theta = \theta_0 \qquad\qquad H_1 : \theta = \theta_1$$

El test UMP de nivel 0.05 es

$$\phi(X) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad X \geq 3 \\ 0 & \text{si} \quad X < 3 \end{cases} \qquad\qquad \beta_\phi(\theta_1) = 0.94$$

El test UMP de nivel 0.03 es

$$\phi(X) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad X = 5 \\ \frac{1}{2} & \text{si} \quad X = 4 \\ 0 & \text{si} \quad X < 4 \end{cases} \qquad\qquad \beta_\phi(\theta_1) = 0.615$$

Ejemplos

x	1	2	3	4	5
$p(x,\theta_0)$	0.94	0.01	0.01	0.02	0.02
$p(x,\theta_1)$	0.02	0.04	0.15	0.35	0.44

x	1	2	3	4	5
L	$\frac{1}{47}$	4	15	17.5	22
$p(x,\theta_0)$	0.94	0.01	0.01	0.02	0.02

Ejemplos

x	1	2	3	4	5
$p(x,\theta_0)$	0.94	0.01	0.01	0.02	0.02
$p(x,\theta_1)$	0.02	0.09	0.09	0.36	0.44

$$H_0 : \theta = \theta_0 \qquad\qquad H_1 : \theta = \theta_1$$

El test UMP de nivel 0.05 es

$$\phi(X) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad L = \frac{p(x,\theta_1)}{p(x,\theta_0)} > 9 \\ \frac{1}{2} & \text{si} \quad L = 9 \\ 0 & \text{si} \quad L < 9 \end{cases} = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad X \in \{4,5\} \\ \frac{1}{2} & \text{si} \quad X \in \{2,3\} \\ 0 & \text{si} \quad X = 1 \end{cases}$$

Los siguientes test resultan UMP de nivel 0.05

$$\phi_1(X) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad X \in \{3,4,5\} \\ & \\ 0 & \text{si} \quad X < 3 \end{cases} \qquad \phi_2(X) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad X \in \{2,4,5\} \\ & \\ 0 & \text{si} \quad X \in \{1,3\} \end{cases}$$

Ejemplos

x	1	2	3	4	5
$p(x, \theta_0)$	0.94	0.01	0.01	0.02	0.02
$p(x, \theta_1)$	0.02	0.09	0.09	0.36	0.44

x	1	2	3	4	5
L	$\frac{1}{47}$	9	9	18	22
$p(x, \theta_0)$	0.94	0.01	0.01	0.02	0.02

Caso Normal

- $X_1, \ldots, X_n$ m.a. $N(\mu, \sigma_0^2)$ σ_0^2 conocido,
- $H_0 : \mu = \mu_0$ contra $H_1 : \mu = \mu_1$ con $\mu_1 > \mu_0$

Caso Normal

- $X_1, \ldots, X_n$ m.a. $N(\mu, \sigma_0^2)$ σ_0^2 conocido,
- $H_0 : \mu = \mu_0$ contra $H_1 : \mu = \mu_1$ con $\mu_1 > \mu_0$
  El test **UMP** de nivel α es

$$\phi_1(X_1, \ldots, X_n) = \begin{cases} 1 & \text{si } \sqrt{n}\frac{(\overline{X} - \mu_0)}{\sigma_0} \geq z_\alpha \\ \\ 0 & \text{si } \sqrt{n}\frac{(\overline{X} - \mu_0)}{\sigma_0} < z_\alpha \end{cases}$$

Caso Normal

- $X_1, \ldots, X_n$ m.a. $N(\mu, \sigma_0^2)$ σ_0^2 conocido,
- $H_0 : \mu = \mu_0$ contra $H_1 : \mu = \mu_1$ con $\mu_1 > \mu_0$
  El test **UMP** de nivel α es

$$\phi_1(X_1, \ldots, X_n) = \begin{cases} 1 & \text{si } \sqrt{n}\frac{(\overline{X}-\mu_0)}{\sigma_0} \geq z_\alpha \\ & \\ 0 & \text{si } \sqrt{n}\frac{(\overline{X}-\mu_0)}{\sigma_0} < z_\alpha \end{cases}$$

- ϕ_1 es **UMP** de nivel α para
  $$H_0 : \mu = \mu_0 \text{ contra } H_1 : \mu > \mu_0$$
- $\beta_{\phi_1}(\mu) = 1 - \Phi\left(z_\alpha + \sqrt{n}\frac{(\mu_0 - \mu)}{\sigma_0}\right)$

Caso Normal

- $X_1, \ldots, X_n$ m.a. $N(\mu, \sigma_0^2)$ σ_0^2 conocido,
- $H_0 : \mu = \mu_0$ contra $H_1 : \mu = \mu_1$ con $\mu_1 < \mu_0$

Caso Normal

- $X_1, \ldots, X_n$ m.a. $N(\mu, \sigma_0^2)$ σ_0^2 conocido,
- $H_0 : \mu = \mu_0$ contra $H_1 : \mu = \mu_1$ con $\mu_1 < \mu_0$
  El test **UMP** de nivel α es

$$\phi_2(X_1, \ldots, X_n) = \begin{cases} 1 & \text{si } \sqrt{n}\frac{(\overline{X}-\mu_0)}{\sigma_0} \leq -z_\alpha \\ \\ 0 & \text{si } \sqrt{n}\frac{(\overline{X}-\mu_0)}{\sigma_0} > -z_\alpha \end{cases}$$

Caso Normal

- $X_1, \ldots, X_n$ m.a. $N(\mu, \sigma_0^2)$ σ_0^2 conocido,
- $H_0 : \mu = \mu_0$ contra $H_1 : \mu = \mu_1$ con $\mu_1 < \mu_0$
  El test **UMP** de nivel α es

$$\phi_2(X_1, \ldots, X_n) = \begin{cases} 1 & \text{si } \sqrt{n}\frac{(\overline{X} - \mu_0)}{\sigma_0} \leq -z_\alpha \\ \\ 0 & \text{si } \sqrt{n}\frac{(\overline{X} - \mu_0)}{\sigma_0} > -z_\alpha \end{cases}$$

- ϕ_2 es **UMP** de nivel α para
$$H_0 : \mu = \mu_0 \text{ contra } H_1 : \mu < \mu_0$$
- $\beta_{\phi_2}(\mu) = \Phi\left(-z_\alpha + \sqrt{n}\frac{(\mu_0 - \mu)}{\sigma_0}\right)$

Caso Normal

- $X_1, \ldots, X_n$ m.a. $N(\mu, \sigma_0^2)$ σ_0^2 conocido,

- ϕ_1 tiene función de potencia creciente
  Es **UMP** de nivel α para
  $$H_0 : \mu \leq \mu_0 \text{ contra } H_1 : \mu > \mu_0$$

- ϕ_2 tiene función de potencia decreciente
  Es **UMP** de nivel α para
  $$H_0 : \mu \geq \mu_0 \text{ contra } H_1 : \mu < \mu_0$$