# Elementos de Cálculo Numérico / Cálculo Numérico

Segundo Cuatrimestre 2019

## Práctica N° 4: Métodos iterativos para sistemas lineales.

**Ejercicio 1** Escribir un programa que implemente el método de Jacobi y otro que implemente el método de Gauss-Seidel para la resolución de un sistema lineal $Ax = b$, con las siguientes condiciones:

- que finalice si el método se estaciona,
- que finalice con una advertencia si se excede cierto tope de iteraciones,

Sugerencia: utilizar los comandos `tril` y `diag` de `Octave`.

**Ejercicio 2** El objetivo de este ejercicio es probar que el radio espectral de una matriz $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ acota inferiormente a toda norma de $A$, sin utilizar normas complejas.

Dada $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, sea $\lambda = a+ib$ un autovalor de $A$ y sea $u+iv$ el autovector correspondiente, con $a, b \in \mathbb{R}$, $u, v \in \mathbb{R}^n$.

a) Calcular $Au$ y $Av$ y probar que:

$$\|Au\|_2^2 + \|Av\|_2^2 = (a^2 + b^2)(\|u\|_2^2 + \|v\|_2^2).$$

b) Concluir que:

$$|\lambda| \leq \|A\|_2.$$

c) Probar que dada una norma cualquiera $\|\cdot\|$ en $\mathbb{R}^{n\times n}$ vale que

$$|\lambda| \leq \|A\|.$$

(Sugerencia: Usar la equivalencia de normas. Notar que si $B = A^m$, entonces $\lambda^m$ es autovalor de $B$).

**Ejercicio 3** Sea $A$ una matriz que admite una base de autovectores. Mostrar una norma $|||.|||$ subordinada a una norma vectorial tal que $\rho(A) = |||A|||$.

**Ejercicio 4** Considerar el sistema $Ax = b$ para $A = \begin{pmatrix} 64 & -6 \\ 6 & -1 \end{pmatrix}$ y $b = (1, 2)$.

a) Demostrar que el método de Jacobi converge para todo dato inicial. Verificar, sin embargo, que la matriz no es diagonal dominante.

b) Sea $J$ la matriz de iteración. Hallar las normas 1, $\infty$ y 2 de $J$. Hallar una norma $\|\ \|$ en la cual $\|J\|$ sea $< 1$.

**Ejercicio 5** Decidir para cada uno de los siguientes sistemas, si los métodos de Jacobi y de Gauss-Seidel son convergentes. En caso afirmativo usarlos para resolver el sistema. Si ambos métodos convergen, determinar cuál converge más rápido. ¿Es la matriz del sistema diagonal dominante? ¿y simétrica y definida positiva?

$$\text{(a)} \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 6 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 9 \\ 6 \end{pmatrix}, \quad \text{(b)} \begin{pmatrix} 5 & 7 & 6 & 5 \\ 7 & 10 & 8 & 7 \\ 6 & 8 & 10 & 9 \\ 5 & 7 & 9 & 10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 23 \\ 32 \\ 33 \\ 31 \end{pmatrix}$$

**Ejercicio 6** a) Mostrar que toda matriz $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ con $|\det(B)| > 1$ tiene un autovalor $\lambda$, real o complejo, con $|\lambda| > 1$.

b) Decidir si el método de Jacobi converge o no para un sistema dado por la matriz
$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 4 & -1 & 3 \\ 5 & 6 & -1 \end{pmatrix}.$$

**Ejercicio 7** Sean $A, B \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ las matrices

$$A = \begin{pmatrix} a & c & 0 \\ c & a & c \\ 0 & c & a \end{pmatrix}; \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & b & 0 \\ b & 0 & b \\ 0 & b & 0 \end{pmatrix}.$$

a) Probar que $\lim_{n\to\infty} B^n = 0$ si y sólo si $|b| < \sqrt{2}/2$.

b) Dar condiciones necesarias y suficientes sobre $a, c \in \mathbb{R}$ para la convergencia de los métodos de Jacobi y de Gauss-Seidel aplicados a la resolución de $Ax = v$.

**Ejercicio 8** a) Probar que si $A$ tiene una base de autovectores $v_i$, con autovalores $\lambda_i$, la matriz

$$B = I + sA, \quad s \in \mathbb{R}$$

tiene los mismos autovectores, con autovalores $\nu_i = 1 + s\lambda_i$.

b) Se sabe que los autovalores de la matriz $A \in \mathbb{R}^{(n-1)\times(n-1)}$

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & \cdot & \cdot & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & \cdot & 0 \\ & \cdot & \cdot & \cdot & & \\ & \cdot & \cdot & \cdot & & \\ 0 & \cdot & \cdot & 1 & -2 & 1 \\ 0 & \cdot & \cdot & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

son $\lambda_j = -4\sin^2(\frac{\pi j}{2n})$, $j = 1, \ldots, n-1$. Considerar sistemas de la forma $Ax = b$, con $A$ como en el ítem anterior. Decidir si el método de Jacobi converge. ¿Qué sucede con el método de Gauss-Seidel? ¿Cuál resulta preferible?

c) Considerar el problema de Poisson en el intervalo $[0,1]$:

$$\begin{aligned} u''(x) = f(x), &\quad x \in [0,1] \\ u(0) = u(1) = 0 & \end{aligned}$$

Formular el problema por diferencias finitas (esto es usando la discretización habitual de la derivada segunda). Decidir si los métodos de Jacobi o Gauss-Seidel pueden aplicarse para resolver el sistema lineal resultante.

**Ejercicio 9** a) Sean $M, N \in \mathbb{R}^{n\times n}$, con $M$ inversible. Probar que los autovalores de $-M^{-1}N$ son las raíces del polinomio $\det(\lambda M + N)$

b) Sean

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1+\frac{1}{\alpha} \\ 1 & \frac{1}{\alpha} & 0 \\ 1+\frac{1}{\alpha} & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{\alpha} \\ 0 & \frac{1}{\alpha} & 0 \\ \frac{1}{\alpha} & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Para resolver un sistema $Ax = b$ se propone el método iterativo:

$$x_{n+1} = -M^{-1}Nx_n + M^{-1}b, \tag{1}$$

Siendo $N = A - M$. Probar que si el método (1) converge a $x$, entonces $x$ es solución del sistema $Ax = b$.

c) Hallar todos los valores de $\alpha$ para los cuáles el método propuesto converge.

d) ¿Qué restricción debería imponerse sobre $\alpha$ si se quiere garantizar que el error $e_n = x_n - x$ satisfaga:

$$\|e_n\| < \left(\frac{1}{2}\right)^n \|e_0\|,$$

para alguna norma $\|\cdot\|$?

**Ejercicio 10** Utilizar la iteración de Gauss-Seidel para resolver el sistema $A_n x = b_n$ para

$$A_n = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4+\frac{1}{n^2} \end{pmatrix} \qquad \text{y} \qquad b_n = (1, 2 - \frac{1}{n^2}).$$

¿Cómo es la convergencia? ¿Tiene esto que ver con el mal condicionamiento de $A$? Dar un ejemplo de una matriz mal condicionada para la cual la convergencia sea rápida.

**Ejercicio 11** (método SOR) Dada $A \in R^{n\times n}$ con $a_{ii} \neq 0$, $1 \leq i \leq n$, $A = L + D + U$ con $L =$ triangulo inferior estricto de $A$, $D = \text{diag}(A)$ y $U =$ triangulo superior estricto de $A$.

1. Demostrar que el sistema $Ax = b$ es equivalente al sistema $(D + wL)x = ((1-w)D - wU)x + wb$, cualquiera sea $w \neq 0$.

2. Considere el método iterativo $x^{k+1} = B(w)x^k + c$ con $B(w) = (D+wL)^{-1}((1-w)D - wU)$. Probar que $\det(B(\omega)) = (1-\omega)^n$ y concluir que: Si el método converge $\Rightarrow w \in (0,2)$

3. Sea

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & 1 \end{pmatrix}$$

Compare los métodos para $w = \frac{3}{2}$ y $w = 1$ ¿ Cuál elegiría y por qué ?