Ecuaciones diferenciales – 2° cuatrimestre 2019

Espacios de Sobolev

Ejercicio 1. Sea $U \subset \mathbb{R}^n$ abierto y sean $u,\ v \in W^{k,p}(U),\ |\alpha| \leq k$. Entonces:

1. $D^\alpha u \in W^{k-|\alpha|,p}(U)$ y $D^\beta(D^\alpha u) = D^\alpha(D^\beta u) = D^{\alpha+\beta}u$ para todo par de multiíndices $\alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^n$ tales que $|\alpha| + |\beta| \leq k$.
2. Para cada $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $\lambda u + \mu v \in W^{k,p}(U)$ y $D^\alpha(\lambda u + \mu v) = \lambda D^\alpha u + \mu D^\alpha v$.
3. Si $V \subset U$, entonces $u \in W^{k,p}(V)$.
4. Si $\zeta \in C_c^\infty(U)$, entonces $\zeta u \in W^{k,p}(U)$ y
$$D^\alpha(\zeta u) = \sum_{\beta \leq \alpha} \binom{\alpha}{\beta} D^\alpha \zeta D^{\alpha-\beta} u.$$

Ejercicio 2. Probar que en cada clase de $W^{k,p}(U)$ existe a lo sumo una función continua.

Ejercicio 3. Sea $I = (a, b) \subset \mathbb{R}$ un intervalo.

1. Probar que si $u \in W^{1,p}(I)$, $1 \leq p < \infty$ entonces $u \in AC(I)$.
2. Probar que si $u \in W^{1,p}(I)$, $p > 1$, entonces
$$|u(x) - u(y)| \leq \left(\int_a^b |u'|^p dt \right)^{1/p} |x - y|^{1-\frac{1}{p}}.$$

Ejercicio 4. Sea $f \in H^1(\mathbb{R})$, probar que $h^{-1}(\tau_h f - f)$ converge a f' en $L^2(\mathbb{R})$ cuando $h \to 0$, donde $\tau_h f(x) = f(x + h)$.

Sugerencia: escribir $h^{-1}(\tau_h f - f)$ como $f' * \varphi_h$.

Ejercicio 5. Sea $I = (a, b) \subset \mathbb{R}$ un intervalo.

1. Probar que existe una constante C tal que para toda $f \in H^1(I)$,
$$|f(x)| \leq C\|f\|_{1,2}.$$
2. Probar que existe una constante C tal que para toda $f \in H_0^1(I)$,
$$|f(x)| \leq C\|f'\|_2.$$
3. Concluir que $\|f'\|_2$ es una norma equivalente a $\|f\|_{1,2}$ en $H_0^1(I)$.
4. Mostrar que el ítem 1 es falso en $U \subset\subset \mathbb{R}^2$.
5. Usando el teorema de Arzela-Ascoli, probar que un conjunto acotado de $H^1(I)$ es precompacto en $C(\bar{I})$, y por lo tanto en $L^2(I)$.

Ejercicio 6. Sea $I = (a, b) \subset \mathbb{R}$ un intervalo y sea $f \in L^2(I)$. Probar que $f \in H^1(I)$ si y sólo si
$$\sum_{k=1}^\infty k^2 |\hat{f}(k)|^2 < \infty,$$
donde $\hat{f}(k)$ son los coeficientes del desarrollo de f en series de Fourier.

Ejercicio 7. Sea $I = (a, b) \subset \mathbb{R}$ un intervalo y sea $f \in H^1(I)$. Sea $\{I_j\}_{j\in J}$ una colección de intervalos disjuntos en I, $I_j = (a_j, b_j)$. Probar que
$$\sum_{j\in J} |f(b_j) - f(a_j)| \leq \|f\|_{1,2} \left(\sum_{j\in J} |b_j - a_j| \right)^{1/2}.$$
Concluir que $VA(I) \subset H^1(I)$.

Ejercicio 8. Sea $u \in W^{k,p}(U)$, $1 \leq p < \infty$. Definimos $u^\varepsilon \equiv \rho_\varepsilon * u$ en U_ε, donde ρ es el núcleo regularizante, ρ_ε las aproximaciones de la identidad y

$$U_\varepsilon := \{x \in U \colon \operatorname{dist}(x, \partial U) > \varepsilon\}.$$

Entonces:

1. $u^\varepsilon \in C^\infty(U_\varepsilon)$, para cada $\varepsilon > 0$.
2. $u^\varepsilon \to u$ en $W^{k,p}_{\mathrm{loc}}(U)$ cuando $\varepsilon \to 0$.

Ejercicio 9. Sea U abierto y acotado. Probar que si $u \in H^2(U) \cap H^1_0(U)$ entonces

$$\int_U |Du|^2\,dx \leq C \left(\int_U |u|^2\,dx\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_U |\Delta u|^2\,dx\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Concluir que en $H^2_0(U)$, $\|\Delta u\|_2$ es una norma equivalente a la usual.

Ejercicio 10. Sea $u \in W^{1,p}(U)$ tal que $\nabla u = 0$ a.e. en U. Probar que u es constante en cada componente conexa de U.

Ejercicio 11. Mostrar que las conclusiones del Teorema de compacidad de Rellich–Kondrachov se mantienen si en lugar de asumir que $U \subset \mathbb{R}^n$ es acotado se asume que $|U| < \infty$.

Ejercicio 12 (Desigualdad de Poincaré)**.** Sea U un abierto conexo y acotado de $\mathbb{R}^n$ con borde C^1. Probar que existe una constante $C > 0$ que depende sólo de n y U tal que

$$\|u - (u)_U\|_2 \leq C\|\nabla u\|_2$$

para cada $u \in H^1(U)$, donde

$$(u)_U = \fint_U u\,dx.$$

Sugerencia: Razonar por el absurdo y usar la compacidad de la inclusión $W^{1,p}(U) \subset\subset L^p(U)$.

Ejercicio 13. Sea $\alpha > 0$. Probar que existe una constante $C > 0$ que depende sólo de α y de la dimensión del espacio, tal que

$$\int_U u^2\,dx \leq C \int_U |\nabla u|^2\,dx,$$

para toda $u \in H^1(U)$ tal que $|\{x \in U \colon u(x) = 0\}| \geq \alpha$.

Ejercicio 14. Sea $F \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función de clase C^1 con F' acotada. Sean $U \subset \mathbb{R}^n$ abierto acotado y $u \in W^{1,p}(U)$ con $1 < p < \infty$. Probar que

$$F(u) \in W^{1,p}(U) \quad \text{y} \quad \partial_i F(u) = F'(u)\partial_i u \ (i = 1, \ldots, n).$$

Ejercicio 15. Sea $1 < p < \infty$ y $U \subset \mathbb{R}^n$ abierto acotado.

1. Probar que si $u \in W^{1,p}(U)$, entonces $|u| \in W^{1,p}(U)$.
2. Probar que si $u \in W^{1,p}(U)$, entonces $u^+, u^- \in W^{1,p}(U)$ y

$$\nabla u^+ = \begin{cases} \nabla u & \text{c.t.p. en } \{u > 0\} \\ 0 & \text{a.e. en } \{u \leq 0\}, \end{cases}$$

$$\nabla u^- = \begin{cases} 0 & \text{c.t.p. en } \{u \geq 0\} \\ -\nabla u & \text{c.t.p. en } \{u < 0\}. \end{cases}$$

Sugerencia: $u^+ = \operatorname{lím}_{\varepsilon \to 0} F_\varepsilon(u)$ para

$$F_\varepsilon(t) = \begin{cases} \sqrt{t^2+\varepsilon^2} - \varepsilon & \text{si } t \geq 0 \\ 0 & \text{si } t < 0. \end{cases}$$

3. Probar que si $u \in W_0^{1,p}(U)$ entonces $u^+, u^- \in W_0^{1,p}(U)$.
4. Probar que si $u \in W^{1,p}(U)$, entonces

$$\nabla u = 0 \text{ c.t.p. en } \{u = 0\}.$$