Ecuaciones diferenciales – 2° cuatrimestre 2019

Ecuación de Laplace y de Poisson

Ejercicio 1. Probar que la ecuación de Laplace $\Delta u = 0$ es invariante por rotaciones.

Esto es, si $O \in \mathbb{R}^{n\times n}$ es una matriz ortogonal (i.e. $O \cdot O^\top = I_n$) y definimos $v(x) = u(Ox)$, entonces $\Delta v = 0$.

Ejercicio 2. Verificar las siguientes afirmaciones indicando en cada caso las hipótesis de regularidad sobre u necesarias para su validez.

1. *Combinaciones lineales:* Si u_1 y u_2 son funciones armónicas, entonces $\alpha u_1 + \beta u_2$ es armónica.
2. *Homotecias:* Si u es armónica, entonces $u_\lambda(x) = u(\lambda x)$ es armónica.
3. *Traslaciones:* Si u es armónica, entonces $u(x - \xi)$ es armónica.
4. *Diferenciación respecto a parámetros:* Si $u(x, \gamma)$ es armónica para cada γ, entonces $\frac{\partial u}{\partial \gamma}(x, \gamma)$ es armónica para cada γ.
5. *Integración respecto a parámetros:* Si $u(x, \gamma)$ es armónica para cada γ, entonces $\int_a^b u(x, \gamma)d\gamma$ es armónica.
6. *Diferenciación respecto a x:* Si u es armónica, entonces $D^\alpha u$ es armónica para todo multiíndice $\alpha \in \mathbb{N}^n$.
7. *Convoluciones:* Si u es armónica, entonces $\int u(x - \xi)\varphi(\xi)d\xi$ es armónica.

Ejercicio 3. Decimos que $v \in C^2(U)$ es subarmónica si $\Delta v \geq 0$ en U.

Supongamos que trabajamos en un dominio U abierto y acotado.

1. Probar que si $v \in C(\bar{U})$ entonces $\max_{\bar{U}} v = \max_{\partial U} v$.
   Sugerencia: Probarlo primero suponiendo que v satisface que $\Delta v > 0$ y luego probarlo para $v_\varepsilon(x) := v(x) + \varepsilon |x|^2$ y hacer $\varepsilon \to 0$.
2. Probar que si $x_0 \in U$ y $r < d(x_0, \partial U)$, entonces
$$v(x_0) \leq \fint_{B(x_0,r)} v(\xi)d\xi$$
3. Probar que v verifica el principio fuerte del máximo.
4. Sea $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función convexa y regular. Si u es armónica y $v = \phi(u)$, entonces v es subarmónica.
5. Probar que $v = |\nabla u|^2$ es subarmónica, si u es armónica.

Ejercicio 4. Sea $u \in C^2(B_1(0)) \cap C(\overline{B_1(0)})$ una solución regular de

$$\begin{cases} \Delta u = f & \text{en } B_1(0) \\ u = g & \text{en } \partial B_1(0). \end{cases}$$

Probar que existe una constante C, que depende sólo de la dimensión del espacio, tal que

$$\max_{B_1(0)} |u| \leq C \left(\max_{\partial B_1(0)} |g| + \max_{B_1(0)} |f| \right).$$

¿Es cierta la conclusión del ejercicio si cambiamos $B_1(0)$ por U un dominio acotado cualquiera?

Ejercicio 5. Notemos por B_1^+ a la semi bola $\{x \in \mathbb{R}^n / \ |x| < 1, x_n > 0\}$. Sea $u \in C(\overline{B_1^+})$, armónica en B_1^+ con $u = 0$ en $\partial B_1^+ \cap \{x_n = 0\}$ y notamos $x = (x', x_n)$ con $x' \in \mathbb{R}^{n-1}$. Definimos

$$U(x) = \begin{cases} u(x) & \text{si } x_n \geq 0, \\ -u(x', -x_n) & \text{si } x_n < 0, \end{cases}$$

para $x \in B_1(0)$. Probar que U es armónica en $B_1(0)$. Concluir que u es C^∞ hasta $\{x_n = 0\}$.

Ejercicio 6.

1. Sea u una función armónica en $B_1(0)$. Probar que
$$\sup_{B_{1/2}(0)} |\nabla u(x)| \leq C \sup_{B_1(0)} |u(x)|,$$
donde C depende sólo de la dimensión del espacio.
2. Sea u armónica en U y sea $V \subset\subset U$. Probar que entonces se tiene
$$\sup_V |\nabla u| \leq C \sup_U |u|,$$
donde C es una constante positiva que sólo depende de la dimensión del espacio y de $\operatorname{dist}(V, \partial U)$.
3. Deducir del ítem 1 que si u es armónica en $B_R(0)$, entonces
$$\sup_{B_{R/2}(0)} |\nabla u(x)| \leq \frac{C}{R} \sup_{B_R(0)} |u(x)|,$$
donde C es la constante del ítem 1.
4. Concluir que si u es armónica en $\mathbb{R}^n$ y acotada, entonces u es constante.

Ejercicio 7. Probar que existe a lo sumo una solución acotada del problema

$$\begin{cases} \Delta u = f & \text{en } \mathbb{R}^n_+, \\ u = g & \text{en } \partial\mathbb{R}^n_+. \end{cases}$$

¿Sigue valiendo la unicidad si eliminamos la hipótesis de que u sea acotada?

Ejercicio 8. Sea $\{u_k\}_{k=1}^\infty$ una sucesión de funciones armónicas en U que converge uniformemente sobre los compactos de U a una función u. Probar que u es armónica.

Ejercicio 9. Sea $\{u_k\}_{k\in\mathbb{N}} \in C^2(U) \cap C(\bar{U})$ (U acotado), las soluciones de los siguientes problemas,

$$\begin{cases} \Delta u_k = 0 & \text{en } U \\ u_k = g_k & \text{en } \partial U. \end{cases}$$

Probar que si $g_k \rightrightarrows g$ uniformemente en ∂U, entonces existe $u \in C^2(U) \cap C(\bar{U})$ tal que $u_k \rightrightarrows u$ uniformemente en U y $\Delta u = 0$ en U.

Ejercicio 10 (Teorema de Harnack de convergencia monótona)**.** Sea $\{u_k\}_{k=1}^\infty$ una sucesión monótona de funciones armónicas en un dominio U abierto y conexo, entonces la sucesión converge en todo punto o diverge en todo punto. En el primer caso, la convergencia es uniforme sobre compactos y el límite es una función armónica.

Ejercicio 11. Probar que si u es armónica en $\mathbb{R}^n$ y $|u(x)| \leq C(1 + |x|^k)$, entonces u es un polinomio de grado a lo sumo k.

Ejercicio 12. Probar que si el problema de Neumann

$$\begin{cases} \Delta u = f & \text{en } U, \\ \partial_{\mathbf{n}} u = g & \text{en } \partial U, \end{cases}$$

tiene una solución en U acotado ($u \in C^2(U) \cap C^1(\bar{U})$) entonces

$$\int_U f(x)dx = \int_{\partial U} g(x)\, dS.$$

Relacionar con el Ejercicio 10 de la práctica 1.

Ejercicio 13. Sea U un dominio con borde regular. Probar que si $u \in C^2(U) \cap C^1(\bar{U})$ es solución de

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{en } U, \\ \partial_{\mathbf{n}} u = 0 & \text{en } \partial U, \end{cases}$$

entonces u es constante.

Ejercicio 14. Sea $u \in C^2(B_R(0)) \cap C(\overline{B_R(0)})$ una función armónica y no negativa. Probar la siguiente forma de la *desigualdad de Harnack*

$$\frac{R^{n-2}(R-|x|)}{(R+|x|)^{n-1}} u(0) \leq u(x) \leq \frac{R^{n-2}(R+|x|)}{(R-|x|)^{n-1}} u(0).$$

Ejercicio 15. Una función $u \in C(U)$ se dice subarmónica (superarmónica) en U si para cada bola $B \subset\subset U$ y para cada función h armónica en B que satisface $u \leq h$ ($u \geq h$) en ∂B, se tiene que $u \leq h$ ($u \geq h$) en B.

1. Mostrar que si $u \in C^2(U)$, u es subarmónica (según esta definición) si y sólo si $\Delta u \geq 0$.
2. Si u es subarmónica en U, entonces satisface el principio fuerte del máximo; y si v es superarmónica en U acotado, con $v \geq u$ en ∂U, entonces $v > u$ en U o $v \equiv u$.
3. Sea u subarmónica en U y $B \subset\subset U$. Notamos con $\tilde{u}$ la función armónica en B (dada por la integral de Poisson) que satisface $\tilde{u} = u$ en ∂B. Definimos el *levantamiento armónico* de u en B por
$$v(x) = \begin{cases} \tilde{u}(x), & x \in B, \\ u(x), & x \in U \setminus B. \end{cases}$$
Entonces v es subarmónica en U.
4. Si $u_1, \ldots, u_N$ son subarmónicas en U, entonces
$$u(x) = \max\{u_1(x), \ldots, u_N(x)\}$$
es subarmónica en U.
5. Enunciar y demostrar los correspondientes resultados para funciones superarmónicas.

Ejercicio 16 (Principio débil del máximo)**.** Sea

$$\mathcal{L}u = -\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\partial_{ij}u + \sum_{i=1}^{n} b_i(x)\partial_i u + c(x)u,$$

donde a_{ij}, b_i y c son funciones continuas en $\bar{U}$ y $u \in C^2(U) \cap C(\bar{U})$. La matriz $(a_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$ es simétrica y definida positiva para cada $x \in \bar{U}$ (un operador $\mathcal{L}$ con estas propiedades se dice *elíptico*). Probar que si $\mathcal{L}u \leq 0$ en U y $c \equiv 0$ entonces el máximo de u se alcanza en ∂U.

Sugerencia: Usar que si A, B son matrices simétricas y semidefinidas positivas de $n \times n$, entonces $\operatorname{tr}(A \cdot B) \geq 0$. ¡Demostrar este hecho!

Ejercicio 17.

1. Sea $\mathcal{L}$ un operador elíptico (como fuera definido en el ejercicio anterior) y supongamos que $c \geq 0$ en U. Si $\mathcal{L}u \leq 0$, entonces
$$\max_{\bar{U}} u \leq \max_{\partial U} u^+$$
donde $u^+ = \max\{u, 0\}$.
2. Dar un contraejemplo para el ítem 1 si $c < 0$.

3. Sea U acotado y $c \geq 0$. Si $\mathcal{L}u = \mathcal{L}v$ en U y $u = v$ en ∂U entonces $u = v$ en U.
4. Dar un contraejemplo para el ítem 3 si U no es acotado.

Ejercicio 18 (Lema de Hopf)**.** Sea U un dominio con la propiedad que para todo $x_0 \in \partial U$, existe una bola $B_r(y) \subset U$ tal que $x_0 \in \partial B_r(y)$ (esto se conoce como la propiedad de bola tangente interior). Sea $u \in C^2(U) \cap C^1(\bar{U})$ tal que $\Delta u \geq 0$ en U, $x_0 \in \partial U$ y $u(x_0) > u(x)$ para todo $x \in U$. Entonces

$$\partial_{\mathbf{n}} u(x_0) > 0$$

Ejercicio 19. Usar el lema de Hopf para dar otra demostración del principio fuerte del máximo.

Ejercicio 20. Demostrar que si $U \subset \mathbb{R}^n$ es un abierto con frontera de clase C^2 entonces posee la propiedad de la bola tangente exterior.

Ejercicio 21. Mostrar que el problema de Dirichlet es resoluble para todo dominio $U \subset \mathbb{R}^n$ que satisface la propiedad del *cono exterior*; esto es, para todo $y \in \partial U$ existe un cono circular finito K con vértice en y ta que $\bar{K} \cap \bar{U} = \{y\}$.

Sugerencia: Mostrar que en cada punto $y \in \partial U$ puede elegirse una barrera de la forma $w = r^\lambda f(\theta)$ donde $(r, \theta) \in \mathbb{R}_+ \times S^{n-1}$ son las variables polares centradas en y.