Ecuaciones diferenciales – 2° cuatrimestre 2019

Series de Fourier y separación de variables

Ejercicio 1. Sea $f\colon \mathbb{R} \to \bar{\mathbb{R}}$ medible e integrable en $[-p, p]$ y tal que $f(x + 2p) = f(x)$ para casi todo $x \in \mathbb{R}$. Verificar los siguientes resultados.

1. Para todo $x \in \mathbb{R}$ se verifica
$$\int_{2p}^{2p+x} f(t)\,dt = \int_0^x f(t)\,dt.$$
2. Para todo $a \in \mathbb{R}$, se verifica
$$\int_{a-p}^{a+p} f(t)\,dt = \int_{-p}^{p} f(t)\ dt.$$
3. Si se define g como
$$g(x) := \int_0^x f(t)\,dt,$$
entonces $g(x + 2p) = g(x)$ si y sólo si
$$\int_{-p}^{p} f(t)\,dt = 0.$$

Ejercicio 2. Calcular el desarrollo en serie de Fourier de senos de f y estudiar la convergencia puntual de la serie hallada para

1. $f(x) = \begin{cases} 1 & 0 \le x < \frac{\pi}{2} \\ \frac{1}{2} & x = \frac{\pi}{2} \\ 0 & \frac{\pi}{2} < x \le \pi \end{cases}$
2. $f(x) = x\ (0 \le x < \pi)$

Nota: resolver los siguientes ejercicios suponiendo que las condiciones de borde son "buenas". Luego en 7 buscamos bajo qué condiciones existen, efectivamente, las soluciones a los problemas planteados.

Ejercicio 3. Resolver, separando variables, el problema de Dirichlet para el rectángulo:
$$\begin{cases} \Delta u = 0 & 0 < x < \pi,\ 0 < y < A \\ u(0, y) = 0 \\ u(\pi, y) = 0 \\ u(x, A) = 0 \\ u(x, 0) = f(x) \end{cases}$$

Ejercicio 4. Hallar, usando el método de separación de variables, una solución del problema de la cuerda vibrante con dos extremos fijos:
$$\begin{cases} u_{xx} - \frac{1}{c^2} u_{tt} = 0 & 0 < x < \ell,\ t > 0 \\ u(0, t) = 0 & t > 0 \\ u(\ell, t) = 0 & t > 0 \\ u(x, 0) = f(x) & 0 < x < \ell \\ u_t(x, 0) = g(x) & 0 < x < \ell \end{cases}$$

Ejercicio 5. Resolver, usando separación de variables, el problema: Si D es el cuadrado $[0,1]\times[0,1]$, se busca $u=u(x,y)$ tal que

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{en } D \\ u(x,0)=f_1(x) \\ u(1,y)=f_2(y) \\ u(x,1)=f_3(x) \\ u(0,y)=f_4(y) \end{cases}$$

Ejercicio 6. Resolver:

$$\begin{cases} u_t - k^2\partial_x^2 u + cu = 0 & 0<x<\pi,\ t>0 \\ u(x,0)=f(x) \\ u(0,t)=0 \\ u(\pi,t)=0 \end{cases}$$

Sugerencia: Proponer $v(x,t)=u(x,t)e^{ct}$.

Ejercicio 7. En los ejercicios 3 a 6 imponer condiciones sobre las funciones f, g o f_i (según corresponda) de modo tal que las series obtenidas sean efectívamente soluciones del problema.

Ejercicio 8. Resolver en $0<x<\pi$, $0<y<\pi$:

$$\begin{cases} \Delta u + u_x = 0 \\ u(x,0)=0 \\ u(x,\pi)=0 \\ u(0,y)=0 \\ u(\pi,y)=\sin(y) \end{cases}.$$

Ejercicio 9. Resolver en $0<x<\pi$, $0<y<\pi$:

$$\begin{cases} \Delta u = 0 \\ u(x,0)=x^2 \\ u(x,\pi)=0 \\ u_x(0,y)=0 \\ u_x(\pi,y)=0 \end{cases}$$

Mostrar que la serie obtenida es solución del problema.

Ejercicio 10. Resolver, analizando la validez de la solución, la ecuación de Laplace en un disco en $\mathbb{R}^2$.

1. $\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{en } |x|<1 \\ u=f & \text{en } |x|=1 \end{cases}$ donde $f\in C^1(\{|x|=1\})$.
   (Sugerencia: pasar a coordenadas polares).
2. $\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{en } |x|<1 \\ \partial_{\mathbf{n}} u = f & \text{en } |x|=1 \end{cases}$
   donde f es como en el ítem 1, $\int_{|x|=1} f dS = 0$ y u se anula en el origen.

Probar que el ítem 2 no tiene solución si $\int_{|x|=1} f dS \neq 0$.

Ejercicio 11. Consideremos el siguiente problema en $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}_+$:

$$\begin{cases} u_{tt} - c^2 \Delta u = 0 & \text{en } B_1(0) \times (0, \infty) \\ u = f & \text{en } B_1(0) \times \{t = 0\} \\ u_t = 0 & \text{en } B_1(0) \times \{t = 0\} \\ u = 0 & \text{en } \partial B_1(0) \times (0, \infty) \end{cases}$$

(la solución representa el pequeño movimiento transversal de una membrana circular fija en sus extremos).

Mostrar que, cuando se buscan soluciones de la forma $R(r)\Theta(\theta)T(t)$ al aplicar el método de separación de variables, se obtiene para R la ecuación:

$$(rR')' - \frac{m^2}{r} R + \lambda r R = 0.$$

Ejercicio 12. Aplicar el método de separación de variables para resolver el siguiente problema de conducción de calor en un cilindro circular infinito.

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = 0 & \text{en } B_1(0) \times (0, \infty) \\ u = 0 & \text{en } \partial B_1(0) \times (0, \infty) \\ u(x, 0) = f(|x|) & x \in B_1(0) \end{cases}$$

donde $B_1(0) \subset \mathbb{R}^2$.

Nota: no podemos llegar a una solución explícita. Ver `https://en.wikipedia.org/wiki/Bessel_function`.

Sugerencia: Pasar a coordenadas polares y, dado que el dato inicial es independiente de θ, buscar soluciones independientes de θ.

Ejercicio 13. Verificar por el método de separación de variables que el problema de autovalores

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda u & \text{en } Q := (0,1) \times (0,1) \\ u = 0 & \text{en } \partial Q \end{cases}$$

tiene como soluciones a

$$u_{k,j}(x, y) = \sin(\pi j x) \sin(\pi k y), \qquad \lambda_{k,j} = \pi^2 (j^2 + k^2).$$

para todo $j, k \in \mathbb{N}$.