

# Ecuaciones diferenciales – 2° cuatrimestre 2019

## RESULTADOS PRELIMINARES

**Ejercicio 1.** Revisar los siguientes resultados:

1. Teorema de la función inversa.  
[http://en.wikipedia.org/wiki/Inverse\\_function\\_theorem](http://en.wikipedia.org/wiki/Inverse_function_theorem)
2. Teorema de la función implícita.  
[http://en.wikipedia.org/wiki/Implicit\\_function\\_theorem](http://en.wikipedia.org/wiki/Implicit_function_theorem)
3. Teorema de Arzelà – Ascoli.  
[http://en.wikipedia.org/wiki/Arzela-Ascoli\\_theorem](http://en.wikipedia.org/wiki/Arzela-Ascoli_theorem)
4. Partición de la unidad.  
[http://en.wikipedia.org/wiki/Partition\\_of\\_unity](http://en.wikipedia.org/wiki/Partition_of_unity)
5. Teorema de la divergencia de Gauss.  
[http://en.wikipedia.org/wiki/Divergence\\_theorem](http://en.wikipedia.org/wiki/Divergence_theorem)

**Ejercicio 2.** Revisar los siguientes teoremas de análisis real:

1. Teorema de convergencia monótona de Beppo Levi.  
[http://en.wikipedia.org/wiki/Monotone\\_convergence\\_theorem](http://en.wikipedia.org/wiki/Monotone_convergence_theorem)
2. Teorema de convergencia dominada de Lebesgue.  
[http://en.wikipedia.org/wiki/Dominated\\_convergence\\_theorem](http://en.wikipedia.org/wiki/Dominated_convergence_theorem)
3. Lema de Fatou.  
[http://en.wikipedia.org/wiki/Fatou's\\_lemma](http://en.wikipedia.org/wiki/Fatou's_lemma)

**Ejercicio 3** (Diferenciación bajo el signo integral). Sean  $U \subset \mathbb{R}^n$  abierto,  $V \subset \mathbb{R}^m$  medible,  $f: U \times V \rightarrow \mathbb{R}$  medible y  $x_0 \in U$ .

1. Si  $f(x, \cdot) \in L^1(V)$  para  $|x - x_0| < \varepsilon$ ,  $f(\cdot, y)$  es diferenciable en  $|x - x_0| < \varepsilon$  para casi todo  $y \in V$  y existe  $g \in L^1(V)$  tal que  $|\partial_{x_j} f(x, y)| \leq g(y)$  para todo  $|x - x_0| < \varepsilon$  y para casi todo  $y \in V$ , con  $1 \leq j \leq n$  fijo, entonces la función  $F(x) = \int_V f(x, y) dy$  es derivable para  $|x - x_0| < \varepsilon$  respecto de  $x_j$  y se tiene que

$$\partial_j F(x) = \int_V \partial_{x_j} f(x, y) dy.$$

2. Verificar que si  $\partial_{x_j} f$  es una función continua en  $U \times \bar{V}$ , con  $V$  abierto acotado, entonces verifica las hipótesis del ítem anterior.

**Ejercicio 4.** Sean  $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  derivables.

1. Si  $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  es continua, calcular la derivada de

$$F(x) = \int_{f(x)}^{g(x)} h(s) ds.$$

2. Si  $h: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  es continua y  $\partial_1 h$  es continua y acotada, calcular la derivada de

$$G(x) = \int_{f(x)}^{g(x)} h(x, s) ds.$$

**Ejercicio 5.** Sean  $f, g: \mathbb{R}^n \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$  medibles y  $F: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$  medible. Demostrar los siguientes resultados.

1. Desigualdad de Hölder: Si  $1 \leq p \leq \infty$  y  $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$  entonces

$$\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_{p'}.$$

2. Desigualdad de Minkowsky: Si  $1 \leq p \leq \infty$ , entonces

$$\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p.$$

3. Desigualdad integral de Minkowsky: Si  $1 \leq p < \infty$ , entonces

$$\left( \int_{\mathbb{R}^n} \left| \int_{\mathbb{R}^n} F(x, y) dx \right|^p dy \right)^{1/p} \leq \int_{\mathbb{R}^n} \left( \int_{\mathbb{R}^n} |F(x, y)|^p dy \right)^{1/p} dx.$$

**Ejercicio 6** (Desigualdad de Young). Sea  $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ ,  $g \in L^p(\mathbb{R}^n)$ ,  $1 \leq p \leq \infty$ . Probar que entonces  $f * g \in L^p(\mathbb{R}^n)$  con  $\|f * g\|_p \leq \|f\|_1 \|g\|_p$ , donde el producto de convolución  $f * g$  se define como

$$f * g(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x - y)g(y) dy.$$

**Ejercicio 7.** Sea  $1 \leq p \leq \infty$  y  $p'$  el exponente conjugado (i.e.  $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$  con la extensión obvia  $\frac{1}{0} = \infty$  y  $\frac{1}{\infty} = 0$ ). Si  $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ ,  $g \in L^{p'}(\mathbb{R}^n)$ , entonces  $f * g \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$  y se tiene que  $\|f * g\|_\infty \leq \|f\|_p \|g\|_{p'}$ . Más aún,  $f * g$  es uniformemente continua.

**Ejercicio 8.** Sean  $f \in C_c^k(\mathbb{R}^n)$  ( $k \in \mathbb{N}$ ),  $g \in L_{\text{loc}}^1(\mathbb{R}^n)$ . Entonces  $f * g \in C^k(\mathbb{R}^n)$  y  $D^\alpha(f * g) = (D^\alpha f) * g$ , para todo  $|\alpha| \leq k$ .

**Ejercicio 9** (Núcleo regularizante estándar). Se define la función  $\rho: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  como

$$\rho(t) := \begin{cases} e^{-\frac{1}{1-t^2}} & |t| < 1 \\ 0 & |t| \geq 1 \end{cases}$$

Probar que  $\rho \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ .

Mostrar que si se define  $\rho_\varepsilon: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  como

$$\rho_\varepsilon(x) := \frac{1}{\varepsilon^n} \rho\left(\frac{|x|}{\varepsilon}\right),$$

entonces  $\rho_\varepsilon \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$  y  $\text{sop}(\rho_\varepsilon) \subset B_\varepsilon(0)$ . A la familia  $\{\rho_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$  se la denomina *núcleo regularizante estándar*.

**Ejercicio 10** (Regularización por convolución). Sea  $\rho \in L^1(\mathbb{R}^n)$  tal que

$$\int_{\mathbb{R}^n} \rho(x) dx = 1,$$

y para todo  $\varepsilon > 0$  se define

$$\rho_\varepsilon(x) := \varepsilon^{-n} \rho\left(\frac{x}{\varepsilon}\right).$$

Probar que

1. Si  $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ ,  $1 \leq p < \infty \Rightarrow \|f * \rho_\varepsilon - f\|_p \rightarrow 0$  si  $\varepsilon \rightarrow 0$ .
2. Si  $f \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$  y  $f$  es uniformemente continua en  $V \subset \mathbb{R}^n$ , entonces

$$\sup_{x \in V'} |f * \rho_\varepsilon(x) - f(x)| \rightarrow 0 \text{ si } \varepsilon \rightarrow 0,$$

para todo  $V' \subset\subset V$ .

3. Si  $f$  es continua y acotada en  $\mathbb{R}^n$ , entonces  $f * \rho_\varepsilon$  tiende uniformemente a  $f$  en cada compacto de  $\mathbb{R}^n$ .
4. Si además  $\rho \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ ,  $f \in L^p(\mathbb{R}^n) \Rightarrow f * \rho_\varepsilon \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ .
5. Calcular  $f * \rho_\varepsilon$  si  $f = \chi_{[a,b]}$  y  $\rho$  es la función del Ejercicio 9.

**Ejercicio 11.** Demostrar que  $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$  es denso en  $L^p(\mathbb{R}^n)$  ( $1 \leq p < \infty$ ).

Pista: las funciones de  $L^p(\mathbb{R}^n)$  con soporte compacto son densas en  $L^p(\mathbb{R}^n)$  ( $1 \leq p < \infty$ ).

**Ejercicio 12.** Sean  $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$  y  $h \in \mathbb{R}^n$ . Se define  $\tau_{-h}f(x) := f(x+h)$ . Probar los siguientes resultados.

1. Para  $1 \leq p < \infty$ ,  $\lim_{h \rightarrow 0} \|\tau_{-h}f - f\|_p = 0$ .

Pista: usar que  $C_c(\mathbb{R}^n)$  es denso en  $L^p(\mathbb{R}^n)$ ,  $1 \leq p < \infty$ .

2. Mostrar que el item anterior no vale para  $p = \infty$ .

**Ejercicio 13.** Sea  $U \subset \mathbb{R}^n$  medible. Probar que si  $f \in L^1_{\text{loc}}(U)$  y  $\int_U f\varphi dx = 0$  para toda  $\varphi \in C_c^\infty(U)$ , entonces  $f = 0$  en casi todo punto.

**Ejercicio 14.** Probar que si  $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$  y  $\int_{\mathbb{R}} f\varphi' dx = 0$  para toda  $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ , entonces  $f$  resulta constante.

Pista: tomar  $g \in C_c^\infty(\mathbb{R})$  tal que  $\int_{\mathbb{R}} g = 1$  y para cada  $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ , se verifica que  $\varphi(x) - (\int \varphi)g(x)$  es la derivada de una función  $C_c^\infty(\mathbb{R})$ .

**Ejercicio 15** (Fórmulas de Green). Sea  $U \subset \mathbb{R}^n$  abierto con frontera de clase  $C^1$ . El *Teorema de la divergencia de Gauss* dice que si  $\mathbf{v}: \bar{U} \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $\mathbf{v} = \mathbf{v}(x) = (v_1(x), \dots, v_n(x))$ ,  $v_i \in C^1(U) \cap C^0(\bar{U})$ ,  $1 \leq i \leq n$ , entonces

$$\int_U \operatorname{div} \mathbf{v} dx = \int_{\partial U} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dS,$$

donde  $\mathbf{n} = \mathbf{n}(x)$  es el vector normal exterior unitario a  $\partial U$  y

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = \nabla \cdot \mathbf{v} = \sum_{i=1}^n \partial_i v_i.$$

Usar dicho teorema para demostrar las *Fórmulas de Green*: Si  $u, v \in C^2(U) \cap C^1(\bar{U})$ , entonces

$$(1^\circ) \quad \int_U (v\Delta u + \nabla u \cdot \nabla v) dx = \int_{\partial U} v \partial_{\mathbf{n}} u dS,$$

$$(2^\circ) \quad \int_U (v\Delta u - u\Delta v) dx = \int_{\partial U} (v \partial_{\mathbf{n}} u - u \partial_{\mathbf{n}} v) dS,$$

donde  $\partial_{\mathbf{n}} u = \nabla u \cdot \mathbf{n}$  y

$$\Delta u = \operatorname{div}(\nabla u) = \nabla \cdot \nabla u = \sum_{i=1}^n \partial_{ii} u.$$

**Ejercicio 16.** Sea  $U \subset \mathbb{R}^n$  abierto con frontera de clase  $C^1$ . Sean  $u, v \in C^1(U) \cap C^0(\bar{U})$ . Usar el Teorema de la divergencia de Gauss para probar la *Fórmula de integración por partes*

$$\int_U u \partial_i v dx = - \int_U \partial_i u v dx + \int_{\partial U} uv \mathbf{n}_i dS,$$

donde  $\mathbf{n} = (\mathbf{n}_1, \dots, \mathbf{n}_n)$  es el vector normal exterior unitario a  $\partial U$ .