

## PRÁCTICA 0 - PRELIMINARES: CONJUNTOS Y FUNCIONES

**Ejercicio 1.** Sean  $(X_i)_{i \in I}$  y  $(Y_j)_{j \in J}$  dos familias de conjuntos. Probar que

$$(a) \left( \bigcap_{i \in I} X_i \right) \cup \left( \bigcap_{j \in J} Y_j \right) = \bigcap_{(i,j) \in I \times J} (X_i \cup Y_j)$$

$$(b) \left( \bigcup_{i \in I} X_i \right) \cap \left( \bigcup_{j \in J} Y_j \right) = \bigcup_{(i,j) \in I \times J} (X_i \cap Y_j)$$

$$(c) \left( \bigcap_{i \in I} X_i \right) \times \left( \bigcap_{j \in J} Y_j \right) = \bigcap_{(i,j) \in I \times J} (X_i \times Y_j)$$

$$(d) \left( \bigcup_{i \in I} X_i \right) \times \left( \bigcup_{j \in J} Y_j \right) = \bigcup_{(i,j) \in I \times J} (X_i \times Y_j)$$

(e) Si  $I = J$  y  $\forall i \in I$  se tiene  $Y_i \subseteq X_i$ , entonces

$$\left( \bigcup_{i \in I} Y_i \right) \subseteq \left( \bigcup_{i \in I} X_i \right) \text{ y } \left( \bigcap_{i \in I} Y_i \right) \subseteq \left( \bigcap_{i \in I} X_i \right)$$

(f) Si  $A \subseteq I$  entonces

$$\left( \bigcup_{i \in A} X_i \right) \subseteq \left( \bigcup_{i \in I} X_i \right) \text{ y } \left( \bigcap_{i \in I} X_i \right) \subseteq \left( \bigcap_{i \in A} X_i \right)$$

(g) Para cada conjunto  $F$  se tiene:

$$F - \bigcup_{i \in I} X_i = \bigcap_{i \in I} (F - X_i) \text{ y } F - \bigcap_{i \in I} X_i = \bigcup_{i \in I} (F - X_i)$$

**Ejercicio 2.**

(a) Sean  $A_{n,k}$ ,  $n, k \in \mathbb{N}$ , conjuntos. Probar que

$$\bigcup_{k \in \mathbb{N}} \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_{n,k} \subseteq \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_{n,k}$$

(b) Encontrar conjuntos  $A_{n,k}$ ,  $n, k \in \mathbb{N}$ , tales que

$$\bigcup_{k \in \mathbb{N}} \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_{n,k} \neq \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_{n,k}$$

**Ejercicio 3.** Sean  $(J_l)_{l \in L}$  y  $(X_i)_{i \in I}$  dos familias de conjuntos tales que  $\bigcup_{l \in L} J_l = I$ . Probar que

$$(a) \bigcup_{i \in I} X_i = \bigcup_{l \in L} \left( \bigcup_{i \in J_l} X_i \right)$$

$$(b) \bigcap_{i \in I} X_i = \bigcap_{l \in L} \left( \bigcap_{i \in J_l} X_i \right)$$

**Ejercicio 4.** Si  $A \times B = (A_1 \times B_1) \cup (A_2 \times B_2)$  con  $(A_1 \times B_1) \cap (A_2 \times B_2) = \emptyset$ ,  $A_1 \times B_1 \neq \emptyset$  y  $A_2 \times B_2 \neq \emptyset$  entonces

$$(A = A_1 = A_2 \text{ y } B = B_1 \cup B_2) \text{ ó } (A = A_1 \cup A_2 \text{ y } B_1 = B_2 = B).$$

**Ejercicio 5.** Sean  $f : E \rightarrow F$ ,  $A \subseteq E$ ,  $B \subseteq E$ ,  $C \subseteq F$ ,  $D \subseteq F$ . Probar que

$$(a) A \subseteq B \Rightarrow f(A) \subseteq f(B)$$

$$(b) f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$$

$$(c) f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B)$$

$$(d) \text{ Si } f \text{ es inyectiva, entonces } f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$$

$$(e) A \subseteq f^{-1}(f(A)) \text{ y } f(f^{-1}(D)) \subseteq D$$

$$(f) \text{ Si } f \text{ es inyectiva, entonces } f(E - A) \subseteq F - f(A)$$

$$(g) \text{ Si } f \text{ es suryectiva, entonces } f(E - A) \supseteq F - f(A)$$

$$(h) f^{-1}(F - D) = E - f^{-1}(D)$$

**Ejercicio 6.** Sea  $f : E \rightarrow F$  una función. Sean  $(X_i)_{i \in I}$  y  $(Y_j)_{j \in J}$  dos familias de subconjuntos de  $E$  y  $F$  respectivamente. Probar que

$$(a) f\left(\bigcup_{i \in I} X_i\right) = \bigcup_{i \in I} f(X_i)$$

$$(b) f\left(\bigcap_{i \in I} X_i\right) \subseteq \bigcap_{i \in I} f(X_i)$$

$$(c) \text{ Si } f \text{ es inyectiva, entonces } f\left(\bigcap_{i \in I} X_i\right) = \bigcap_{i \in I} f(X_i)$$

$$(d) f^{-1}\left(\bigcap_{j \in J} Y_j\right) = \bigcap_{j \in J} f^{-1}(Y_j)$$

$$(e) f^{-1}\left(\bigcup_{j \in J} Y_j\right) = \bigcup_{j \in J} f^{-1}(Y_j)$$

**Ejercicio 7.** Dada una sucesión  $(E_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de subconjuntos de  $E$ , se define:

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} E_n = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \bigcap_{k \geq n} E_k \quad (\text{l\u00edmite inferior})$$

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} E_n = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \bigcup_{k \geq n} E_k \quad (\text{l\u00edmite superior})$$

Probar que

(a)  $E - \liminf_{n \rightarrow \infty} E_n = \limsup_{n \rightarrow \infty} (E - E_n)$

(b)  $E - \limsup_{n \rightarrow \infty} E_n = \liminf_{n \rightarrow \infty} (E - E_n)$

(c)  $\liminf_{n \rightarrow \infty} E_n \subseteq \limsup_{n \rightarrow \infty} E_n$

Si  $\liminf_{n \rightarrow \infty} E_n = \limsup_{n \rightarrow \infty} E_n$ , entonces se dice que existe el l\u00edmite de la sucesi\u00f3n  $(E_n)_{n \in \mathbb{N}}$  y a este conjunto se lo denota por  $\lim_{n \rightarrow \infty} E_n$ . Probar que

(d) Si  $E_{n+1} \subseteq E_n \ \forall n \in \mathbb{N}$ , entonces  $\lim_{n \rightarrow \infty} E_n = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} E_n$

(e) Si  $E_n \subseteq E_{n+1} \ \forall n \in \mathbb{N}$   $\lim_{n \rightarrow \infty} E_n = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n$

(f) Dada una sucesi\u00f3n  $(E_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de subconjuntos de un conjunto  $E$  se define

$$\begin{cases} D_0 = \emptyset \\ D_{n+1} = D_n \triangle E_n \ \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Probar que existe  $\lim_{n \rightarrow \infty} D_n$  si y s\u00f3lo si  $\lim_{n \rightarrow \infty} E_n = \emptyset$ .

**Ejercicio 8.** Sea  $X$  un conjunto. Para cada subconjunto  $A \subseteq X$  se define  $\chi_A : X \rightarrow \{0, 1\}$  por

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & x \in A \\ 0 & x \notin A \end{cases}$$

(a)  $A \subseteq B \Leftrightarrow \chi_A(x) \leq \chi_B(x) \ \forall x \in X$

(b)  $\chi_{A \cap B}(x) = \chi_A(x) \cdot \chi_B(x) \ \forall x \in X$

(c)  $\chi_{A \cup B}(x) = \chi_A(x) + \chi_B(x) - \chi_{A \cap B}(x) \ \forall x \in X$

**Ejercicio 9.** Sea  $(E_n)_{n \in \mathbb{N}}$  una sucesi\u00f3n de subconjuntos de  $X$  y  $f : X \rightarrow Y$  una funci\u00f3n. Probar que

(a)  $f(\liminf_{n \rightarrow \infty} E_n) \subseteq \liminf_{n \rightarrow \infty} f(E_n)$

(b)  $f(\limsup_{n \rightarrow \infty} E_n) \subseteq \limsup_{n \rightarrow \infty} f(E_n)$

$$(c) f(\liminf_{n \rightarrow \infty} E_n) \subseteq \limsup_{n \rightarrow \infty} f(E_n)$$

(d) Si  $f$  es inyectiva, en (a) y (b) vale la igualdad.

**Ejercicio 10.** Sea  $E$  un conjunto y  $f : \mathcal{P}(E) \rightarrow \mathcal{P}(E)$  tal que  $A \subseteq B \Rightarrow f(A) \subseteq f(B)$ . Sean  $R = \{Z \subseteq E : f(Z) \subseteq Z\}$  y  $S = \{Z \subseteq E : f(Z) \supseteq Z\}$ . Sean también

$$V = \bigcap_{Z \in R} Z \quad \text{y} \quad W = \bigcup_{Z \in S} Z$$

Probar que

(a)  $f(V) = V$  y  $f(W) = W$ .

(b) Si  $A \subseteq E$  es tal que  $f(A) = A$ , entonces  $V \subseteq A \subseteq W$ .