Distribución Wishart y Distribución Hotelling

Graciela Boente

Definición 1

- Sea $\mathbf{\Sigma} \in \mathbb{R}^{p\times p}$ simétrica y definida positiva y $n \geq p$.

- Sea $\mathbf{W} = (w_{ij}) \in \mathbb{R}^{p\times p}$ una matriz aleatoria, simétrica y definida positiva con probabilidad 1.

- Se dice que $\mathbf{W} \sim \mathcal{W}(\mathbf{\Sigma}, p, n) = \mathcal{W}_p(n, \mathbf{\Sigma})$ si la densidad conjunta de los $p(p+1)/2$ elementos distintos de $\mathbf{W}$ es

$$f(\mathbf{v}) = c^{-1}|\mathbf{V}|^{\frac{n-p-1}{2}} \exp\left\{-\frac{1}{2}\mathrm{tr}\left(\mathbf{\Sigma}^{-1}\mathbf{V}\right)\right\}$$

  - ⋆ $\mathbf{V} = (v_{ij}) \in \mathbb{R}^{p\times p}$
  - ⋆ $\mathbf{v} = (v_{11}, v_{12}, \ldots, v_{pp})^{\mathrm{T}} = (v_{ij})^{\mathrm{T}}_{1\leq i\leq j\leq p} \in \mathbb{R}^{p(p+1)/2}$

$$c = 2^{\frac{np}{2}}\,|\mathbf{\Sigma}|^{\frac{n}{2}}\,\pi^{\frac{p(p-1)}{4}}\prod_{j=1}^{p}\Gamma\left(\frac{1}{2}(n+1-j)\right)$$

Es fácil ver que si $p = 1$ $\mathcal{W}(\sigma^2, 1, n) = \sigma^2\chi^2_n$.

Definición 2

- Sean $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n$ i.i.d., $\mathbf{x}_i \in \mathbb{R}^p$, $\mathbf{x}_i \sim N_p(\mathbf{0}, \boldsymbol{\Sigma})$

  $\mathbf{X} = \begin{pmatrix} \mathbf{x}_i^{\mathrm{T}} \\ \vdots \\ \mathbf{x}_n^{\mathrm{T}} \end{pmatrix}$, o sea, $\mathbf{X}^{\mathrm{T}} = (\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n)$

  Diremos que $\mathbf{W} \sim \mathcal{W}(\boldsymbol{\Sigma}, p, n) = \mathcal{W}_p(n, \boldsymbol{\Sigma})$ si

$$\mathbf{W} \sim \mathbf{X}^{\mathrm{T}}\mathbf{X} = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{x}_i \mathbf{x}_i^{\mathrm{T}}$$

- Sean $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n$ independientes, $\mathbf{x}_i \in \mathbb{R}^p$, $\mathbf{x}_i \sim N_p(\boldsymbol{\mu}_i, \boldsymbol{\Sigma})$

  Diremos que $\mathbf{W}$ tiene Wishart no central con parámetro de no centralidad $\boldsymbol{\Delta} = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{\mu}_i \boldsymbol{\mu}_i^{\mathrm{T}}$,
  $\mathcal{W}(\boldsymbol{\Sigma}, p, n)(\boldsymbol{\Delta}) = \mathcal{W}_p(n, \boldsymbol{\Sigma})(\Delta)$,si

$$\mathbf{W} \sim \mathbf{X}^{\mathrm{T}}\mathbf{X} = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{x}_i \mathbf{x}_i^{\mathrm{T}}$$

Función característica, Muirhead, pag. 87

Sea $\mathbf{W} \sim \mathcal{W}_p(n, \mathbf{\Sigma}) = \mathcal{W}(\mathbf{\Sigma}, p, n)$, entonces su función caraterística está dada por

$$\varphi_{\mathbf{W}}(\mathbf{\Theta}) = \mathbb{E}\left(\exp\left\{i \sum_{1 \leq j \leq k \leq p} \Theta_{jk} W_{jk}\right\}\right) = \det\left(\mathbf{I}_p - i\mathbf{\Gamma}\mathbf{\Sigma}\right)^{-\frac{n}{2}}$$

donde $\mathbf{\Theta} \in \mathbb{R}^{p \times p}$ es simétrica $(\Theta_{jk} = \Theta_{kj})$ y

$$\mathbf{\Gamma} = (\gamma_{jk})_{1 \leq j,k \leq p} \qquad \gamma_{jk} = \begin{cases} \Theta_{jk} & \text{si } j \neq k \\ 2\Theta_{jk} & \text{si } j = k \end{cases}$$

Observaciones

Recordemos que $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n$ independientes, $\mathbf{x}_i \in \mathbb{R}^p$ con $\mathbb{E}(\mathbf{x}_i) = \boldsymbol{\mu}_i$ y $\mathrm{VAR}(\mathbf{x}_i) = \mathbf{\Sigma}$. Sea $\mathbf{X} = \begin{pmatrix} \mathbf{x}_i^{\mathrm{T}} \\ \vdots \\ \mathbf{x}_n^{\mathrm{T}} \end{pmatrix}$, o sea, $\mathbf{X}^{\mathrm{T}} = (\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n)$

$$\mathbb{E}\left(\mathbf{X}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}\mathbf{X}\right) = \mathrm{tr}(\mathbf{A})\mathbf{\Sigma} + \mathbb{E}\left(\mathbf{X}^{\mathrm{T}}\right)\mathbf{A}\mathbb{E}\left(\mathbf{X}\right)$$

- Sean $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n$ independientes, $\mathbf{x}_i \in \mathbb{R}^p$, $\mathbf{x}_i \sim N_p(\boldsymbol{\mu}_i, \mathbf{\Sigma})$ y $\mathbf{W} = \mathbf{X}^{\mathrm{T}}\mathbf{X} = \sum_{i=1}^n \mathbf{x}_i\mathbf{x}_i^{\mathrm{T}}$. O sea, $\mathbf{W} \sim \mathcal{W}(\mathbf{\Sigma}, p, n)(\mathbf{\Delta})$ entonces

$$\mathbb{E}(\mathbf{W}) = n\mathbf{\Sigma} + \mathbf{M}^{\mathrm{T}}\mathbf{M}$$

  con $\mathbf{M} = \mathbb{E}(\mathbf{X})$.

- En particular, $\mathbf{W} \sim \mathcal{W}(\mathbf{\Sigma}, p, n)$

$$\mathbb{E}(\mathbf{W}) = n\mathbf{\Sigma}$$

Propiedades

- Si $n < p$ entonces, $\text{rg}(\mathbf{W}) = \text{rg}(\mathbf{X}) \leq \min(n, p) = n \Longrightarrow \mathbf{W}$ es singular

- **Qué pasa si $n \geq p$?**

- Sea $\mathbf{Z} = (z_{ij})_{1 \leq i,j \leq m}$ con $z_{ij} \sim N(0,1)$ independientes, entonces $\mathbb{P}(\det(\mathbf{Z}) = 0) = 0$.

- Por lo tanto,
  - Si $n \geq p$, $\mathbf{z}_1, \ldots, \mathbf{z}_n$ i.i.d., $\mathbf{z}_i \sim N_p(\mathbf{0}, \mathbf{I}_p)$ y $\mathbf{W} = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{z}_i \mathbf{z}_i^{\mathrm{T}}$ entonces $\mathbb{P}(\mathbf{W}$ es no singular$)=1$.
  - Si $n \geq p$ **y** $\mathbf{\Sigma} > 0$, $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n$ i.i.d., $\mathbf{x}_i \sim N_p(\mathbf{0}, \mathbf{\Sigma})$ y $\mathbf{W} = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{x}_i \mathbf{x}_i^{\mathrm{T}}$ entonces $\mathbb{P}(\mathbf{W}$ es no singular$)=1$.

Propiedades

- Si $n \geq p$ **y** $\mathbf{\Sigma} > 0$ **y** $\mathbf{W} \sim \mathcal{W}(\mathbf{\Sigma}, p, n)$ **entonces** $\mathbb{P}$**(W es no singular)=1**.

- Sean $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n$ i.i.d., $\mathbf{x}_i \in \mathbb{R}^p$, $\mathbf{x}_i \sim N_p(\mathbf{0}, \mathbf{\Sigma})$.

  Si $n \geq p$ y $\mathbf{\Sigma} > 0$, se puede ver que $\mathbf{W} = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{x}_i \mathbf{x}_i^{\mathrm{T}}$ tiene densidad y la densidad de **W** es la dada en la definición 1 (Kshirsagar, A.M. (1972) Multivariate Analysis, pág. 51-58, 77-78).

- O sea, ambas definiciones son equivalentes si $n \geq p$ y $\mathbf{\Sigma} > 0$.

Propiedades

Teorema (Okamoto, 1973). Sean $\mathbf{X}^{\mathrm{T}} = (\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n) \in \mathbb{R}^{p \times n}$ y $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ simétrica de rango r.

Si los elementos de $\mathbf{X}$ tienen densidad conjunta, entonces

$$\mathbb{P}\left(\mathrm{rg}\left(\mathbf{X}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}\mathbf{X}\right) = \min(p, r)\right) = 1$$

$$\mathbb{P}\left(\text{los autovalores no nulos de } \mathbf{X}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}\mathbf{X} \text{ sean distintos}\right) = 1\,.$$

Corolario. Sea $n \geq p$, $\mathbf{\Sigma} > 0$ y $\mathbf{W} \sim \mathcal{W}(\mathbf{\Sigma}, p, n)$, entonces

$$\mathbb{P}\left(\mathrm{rg}\left(\mathbf{W}\right) = p\right) = 1$$

o sea, $\mathbb{P}\left(\mathbf{W} > 0\right) = 1$ y los autovalores de $\mathbf{W}$ son distintos con probabilidad 1.

Propiedades

Sea $\mathbf{W} \sim \mathcal{W}(\mathbf{\Sigma}, p, n)$

a) Sea $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{q \times p}$, $\text{rg}(\mathbf{C}) = q \leq p \Longrightarrow \mathbf{C}\mathbf{W}\mathbf{C}^{\mathrm{T}} \sim \mathcal{W}(\mathbf{C}\mathbf{\Sigma}\mathbf{C}^{\mathrm{T}}, q, n)$.

   En particular, si $\mathbf{\Sigma} = \mathbf{C}\mathbf{C}^{\mathrm{T}}$ con $\mathbf{C}$ triangular inferior $\Longrightarrow$ $\mathbf{C}^{-1}\mathbf{W}(\mathbf{C}^{-1})^{\mathrm{T}} \sim \mathcal{W}(\mathbf{I}_p, p, n)$

b) Si $\mathbf{u} \neq 0$, $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^p \Longrightarrow \mathbf{u}^{\mathrm{T}}\mathbf{W}\mathbf{u}/(\mathbf{u}^{\mathrm{T}}\mathbf{\Sigma}\mathbf{u}) \sim \chi^2_n$.

c) En particular,

$$\frac{w_{jj}}{\sigma_{jj}} \sim \chi^2_n \,.$$

d) Si $\mathbf{y} \neq 0$, $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^p$, es un vector aleatorio independiente de $\mathbf{W}$ tal que $\mathbb{P}(\mathbf{y} \neq \mathbf{0}) = 1 \Longrightarrow$

$$\frac{\mathbf{y}^{\mathrm{T}}\mathbf{W}\mathbf{y}}{\mathbf{y}^{\mathrm{T}}\mathbf{\Sigma}\mathbf{y}} \sim \chi^2_n$$

Propiedades

e) Sea $\mathbf{W} = \begin{pmatrix} \mathbf{W}_{11} & \mathbf{W}_{12} \\ \mathbf{W}_{21} & \mathbf{W}_{22} \end{pmatrix} \sim \mathcal{W}(\boldsymbol{\Sigma}, p, n)$, con $\boldsymbol{\Sigma} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\Sigma}_{11} & \boldsymbol{\Sigma}_{12} \\ \boldsymbol{\Sigma}_{21} & \boldsymbol{\Sigma}_{22} \end{pmatrix}$, $\mathbf{W}_{11} \in \mathbb{R}^{k\times k}$ y $\boldsymbol{\Sigma}_{11} \in \mathbb{R}^{k\times k}$, entonces

- ⋆ $\mathbf{W}_{11} \sim \mathcal{W}(\boldsymbol{\Sigma}_{11}, k, n)$
- ⋆ $\mathbf{W}_{22} \sim \mathcal{W}(\boldsymbol{\Sigma}_{22}, p-k, n)$
- ⋆ Si $\boldsymbol{\Sigma}_{12} = \mathbf{0} \implies \mathbf{W}_{11}$ y $\mathbf{W}_{22}$ son independientes

g) Si $\mathbf{W}_1, \ldots, \mathbf{W}_k$ son independientes $\mathbf{W}_i \sim \mathcal{W}(\boldsymbol{\Sigma}, p, n_i)$ entonces

$$\sum_{j=1}^{k} \mathbf{W}_j \sim \mathcal{W}(\boldsymbol{\Sigma}, p, \sum_{j=1}^{k} n_j)$$

Teorema de descomposición de Bartlett

Sea $\mathbf{D} \sim \mathcal{W}(\mathbf{I}_p, p, n)$ con $n \geq p$ y $\mathbf{D} = \mathbf{B}\mathbf{B}^{\mathrm{T}}$ con $\mathbf{B}$ triangular inferior entonces

- Los elementos b_{ij} $(1 \leq j \leq i \leq p)$ son todos independientes,
- $b_{ii}^2 \sim \chi^2_{n-i+1}$ y
- $b_{ij} \sim N(0,1)$, $1 \leq j < i \leq p$
- o sea, la densidad de los elementos no nulos de $\mathbf{B}$ es

$$\prod_{i=1}^{p} \prod_{j=1}^{i-1} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2} b_{ij}^2} \prod_{k=1}^{p} f_{\chi^2_{n-k+1}}(b_{kk}^2)$$

Corolario

Sea $\mathbf{W} \sim \mathcal{W}(\mathbf{\Sigma}, p, n)$ entonces

$$\frac{\det(\mathbf{W})}{\det(\mathbf{\Sigma})} \sim \prod_{i=1}^{p} v_i$$

donde las p variables aleatorias, v_i, $1 \leq i \leq p$, son independientes con distribución

$$v_i \sim \chi^2_{n-i+1}$$

Propiedades

Sean

- $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ simétrica.
- $\mathbf{\Sigma} > 0$, $\mathbf{x}_1, \ldots \mathbf{x}_n$ independientes $\mathbf{x}_i \sim N_p(\mathbf{0}, \mathbf{\Sigma})$, $\mathbf{X}^{\mathrm{T}} = (\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n)$, es decir,

$$\mathbf{X} \sim N(\mathbf{0}, \mathbf{I}_n \otimes \mathbf{\Sigma}).$$

a) Si $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ es idempotente, con $\mathrm{rg}(\mathbf{A}) = r$ entonces

$$\mathbf{X}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}\mathbf{X} \sim \mathcal{W}(\mathbf{\Sigma}, p, r).$$

b) Sea $\mathbf{Y} = \mathbf{A}\mathbf{X}$ y $\mathbf{Z} = \mathbf{X}^{\mathrm{T}}\mathbf{C}$, si $\mathbf{A}\mathbf{C}^{\mathrm{T}} = \mathbf{0}$ entonces

$\mathbf{Y}$ y $\mathbf{Z}$ son independientes.

Recordemos que

a) Sea $\mathbf{y} \sim N_p(\mathbf{0}, \sigma^2 \mathbf{I}_p)$ y $\mathbf{P} \in \mathbb{R}^{p \times p}$ es simétrica, entonces

$$\frac{\mathbf{y}^{\mathrm{T}} \mathbf{P} \mathbf{y}}{\sigma^2} \sim \chi^2_r \Longleftrightarrow \mathbf{P}^2 = \mathbf{P} \quad \text{y} \quad \mathrm{rg}(\mathbf{P}) = r$$

b) Sea $\mathbf{y} \sim N_p(\mathbf{0}, \sigma^2 \mathbf{I}_p)$ y $\mathbf{P}_\ell \in \mathbb{R}^{p \times p}$ simétricas, $\ell = 1, 2$

Definamos

$$U_\ell = \frac{\mathbf{y}^{\mathrm{T}} \mathbf{P}_\ell \mathbf{y}}{\sigma^2}, \quad \ell = 1, 2 .$$

Supongamos que $U_\ell \sim \chi^2_{r_\ell}$ entonces

$$U_1 \text{ y } U_2 \text{ son independientes} \Longleftrightarrow \mathbf{P}_1 \mathbf{P}_2 = \mathbf{0}$$

Teorema

Sea $\mathbf{\Sigma} > 0$, $\mathbf{x}_1, \ldots \mathbf{x}_n$ independientes $\mathbf{x}_i \sim N_p(\mathbf{0}, \mathbf{\Sigma})$, $\mathbf{X}^{\mathrm{T}} = (\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n)$.

Sean

- $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$, $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^p$, $\mathbf{y} = \mathbf{X}\mathbf{u} = \begin{pmatrix} \mathbf{x}_1^{\mathrm{T}}\mathbf{u} \\ \vdots \\ \mathbf{x}_n^{\mathrm{T}}\mathbf{u} \end{pmatrix}$
- $\sigma_{\mathbf{u}}^2 = \mathbf{u}^{\mathrm{T}}\mathbf{\Sigma}\mathbf{u}$
- $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2 \in \mathbb{R}^{n \times n}$ matrices simétricas $\mathrm{rg}(\mathbf{A}_1) = r$, $\mathrm{rg}(\mathbf{A}_2) = s$
- $U_\ell = \dfrac{\mathbf{y}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}_\ell\mathbf{y}}{\sigma_{\mathbf{u}}^2}$, $\ell = 1, 2$,
- $\mathbf{b} \neq \mathbf{0}$, $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$

Entonces,

a) $\mathbf{X}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}_1\mathbf{X} \sim \mathcal{W}(\mathbf{\Sigma}, p, r) \iff U_1 \sim \chi^2_r$ para cualquier $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$

b) $\mathbf{X}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}_1\mathbf{X} \sim \mathcal{W}(\mathbf{\Sigma}, p, r)$ y $\mathbf{X}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}_2\mathbf{X} \sim \mathcal{W}(\mathbf{\Sigma}, p, s)$ independientes entre sí

$\iff$

U_1 y U_2 son independientes tales que $U_1 \sim \chi^2_r$, $U_2 \sim \chi^2_s$, para cualquier $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$.

c) $\mathbf{X}^{\mathrm{T}}\mathbf{b}$ y $\mathbf{X}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}_1\mathbf{X}$ son independientes

$\iff$

para cualquier $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$, U_1 e $\mathbf{y}^{\mathrm{T}}\mathbf{b}$ son independientes y tales que $\mathbf{y}^{\mathrm{T}}\mathbf{b} \sim N(0, \|\mathbf{b}\|^2\sigma^2_{\mathbf{u}})$, $U_1 \sim \chi^2_r$.

Corolarios

Sea $\mathbf{\Sigma} > 0$, $\mathbf{x}_1, \ldots \mathbf{x}_n$ independientes $\mathbf{x}_i \sim N_p(\mathbf{0}, \mathbf{\Sigma})$, $\mathbf{X}^{\mathrm{T}} = (\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n)$.

Corolario 1 Sea $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ matriz simétrica

$$\mathbf{X}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}\mathbf{X} \sim \mathcal{W}(\mathbf{\Sigma}, p, r) \iff \mathbf{A}^2 = \mathbf{A} \quad \text{y} \quad \mathrm{rg}(\mathbf{A}) = r$$

Corolario 2 Sea $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ matrices simétricas, $\mathbf{b} \neq \mathbf{0}$, $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$

a) $\mathbf{X}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}\mathbf{X} \sim \mathcal{W}(\mathbf{\Sigma}, p, r)$ y $\mathbf{X}^{\mathrm{T}}\mathbf{B}\mathbf{X} \sim \mathcal{W}(\mathbf{\Sigma}, p, s)$ son independientes entre sí $\iff \mathbf{A}\mathbf{B} = 0$

b) $\mathbf{X}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}\mathbf{X} \sim \mathcal{W}(\mathbf{\Sigma}, p, r)$ y $\mathbf{X}^{\mathrm{T}}\mathbf{b} \sim N_p(\mathbf{0}, \|\mathbf{b}\|^2\mathbf{\Sigma})$ independientes entre sí $\iff \mathbf{A}\mathbf{b} = 0$, $\mathbf{A}^2 = \mathbf{A}$ y $\mathrm{rg}(\mathbf{A}) = r$

Definición

Hotelling central

Sean $\mathbf{x} \sim N_p(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$, $\mathbf{W} \sim \mathcal{W}(\boldsymbol{\Sigma}, p, m)$ independientes entre sí, al estadístico

$$T^2_{p,m} = m\,(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})^{\mathrm{T}}\mathbf{W}^{-1}(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu}) \sim \mathcal{H}(p, m)\,,$$

se lo llama estadístico de Hotelling central.

Hotelling no central

Sean $\mathbf{x} \sim N_p(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$, $\mathbf{W} \sim \mathcal{W}(\boldsymbol{\Sigma}, p, m)$ independientes entre sí, al estadístico

$$T^2_{p,m} = m\,\mathbf{x}^{\mathrm{T}}\mathbf{W}^{-1}\mathbf{x} \sim \mathcal{H}(p, m)(\lambda^2)\,,$$

se lo llama estadístico de Hotelling no central.

Lema Previo

Consideremos el modelo lineal

$$\mathbf{y} = \mathbf{K}\,\beta + \mathbf{e} \qquad \mathbf{K} \in \mathbb{R}^{n\times p}, \quad \text{rango}(\mathbf{K}) = p$$

$$\mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}, \quad \beta \in \mathbb{R}^p, \qquad \mathbf{e} \sim N(\mathbf{0}, \sigma^2\,\mathbf{I}_n)$$

Sea $Q = \|\mathbf{y} - \mathbf{K}\widehat{\beta}\|^2 = \min_{\mathbf{b}} \|\mathbf{y} - \mathbf{Kb}\|^2$. Entonces,

a) $Q = 1/w^{11}$ donde

$$\mathbf{W} = \begin{pmatrix} \mathbf{y}^{\mathrm{T}} \\ \mathbf{K}^{\mathrm{T}} \end{pmatrix} (\mathbf{y} \quad \mathbf{K}) = \begin{pmatrix} \mathbf{y}^{\mathrm{T}}\mathbf{y} & \mathbf{y}^{\mathrm{T}}\mathbf{K} \\ \mathbf{K}^{\mathrm{T}}\mathbf{y} & \mathbf{K}^{\mathrm{T}}\mathbf{K} \end{pmatrix} \qquad \mathbf{W}^{-1} = (w^{ij})$$

b) $Q/\sigma^2 \sim \chi^2_{n-p}$

Lema 1

Sea $\mathbf{W} \sim \mathcal{W}(\mathbf{\Sigma}, p, m)$ con $m \geq p$ y $\mathbf{\Sigma} > 0$.

Definamos $\mathbf{\Sigma}^{-1} = (\sigma^{ij})_{1 \leq i,j \leq p}$ y $\mathbf{W}^{-1} = (w^{ij})_{1 \leq i,j \leq p}$, entonces

a)
$$\frac{\sigma^{11}}{w^{11}} \sim \chi^2_{m-p+1}$$
y es independiente de todos los elementos w_{ij} de $\mathbf{W}$ con $2 \leq i, j \leq p$.

b) Dado $\mathbf{b} \neq \mathbf{0}$ $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^p$,
$$\frac{\mathbf{b}^{\mathrm{T}}\mathbf{\Sigma}^{-1}\mathbf{b}}{\mathbf{b}^{\mathrm{T}}\mathbf{W}^{-1}\mathbf{b}} \sim \chi^2_{m-p+1}$$

Teorema 1

Sea

- $\mathbf{W} \sim \mathcal{W}(\mathbf{\Sigma}, p, m)$ con $m \geq p$, $\mathbf{\Sigma} > 0$
- $\mathbf{y} \sim N_p(\boldsymbol{\mu}, \mathbf{\Sigma})$, $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^p$,
- $\mathbf{y}$ independiente de $\mathbf{W}$.

Entonces,

$$\frac{m-p+1}{p}\,\mathbf{y}^{\mathrm{T}}\mathbf{W}^{-1}\mathbf{y} \sim \mathcal{F}_{p,m-p+1}(\lambda^2)\,.$$

donde

$$\lambda^2 = \boldsymbol{\mu}^{\mathrm{T}}\mathbf{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{\mu}\,.$$

Corolario

Sean

$$\left.\begin{array}{l} \bullet\ \mathbf{x} \sim N_p(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma}), \\ \\ \bullet\ \mathbf{W} \sim \mathcal{W}(\boldsymbol{\Sigma}, p, m) \end{array}\right\} \quad \text{independientes entre sí}$$

a) El estadístico $T^2_{p,m} = m\,(\mathbf{x}-\boldsymbol{\mu})^{\mathrm{T}}\mathbf{W}^{-1}(\mathbf{x}-\boldsymbol{\mu})$, tiene distribución $\mathcal{H}(p,m)$ tal que

$$\frac{m-p+1}{p}\,\frac{T^2_{p,m}}{m} \sim \mathcal{F}_{p,m-p+1}$$

b) El estadístico $T^2_{p,m}(\lambda^2) = m\,\mathbf{x}^{\mathrm{T}}\mathbf{W}^{-1}\mathbf{x}$, tiene distribución $\mathcal{H}(p,m)(\lambda^2)$ tal que

$$\frac{m-p+1}{p}\,\frac{T^2_{p,m}}{m} \sim \mathcal{F}_{p,m-p+1}(\lambda^2) \quad \text{con} \quad \lambda^2 = \boldsymbol{\mu}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{\mu}$$