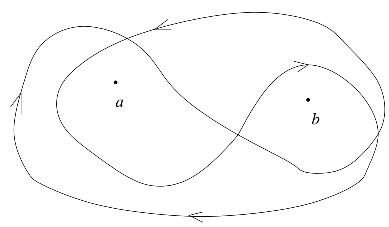
Universidad de Buenos Aires - Facultad de Ciencias Exactas y Naturales - Depto. de Matemática

Análisis Complejo– Segundo Cuatrimestre de 2019

Práctica 6. Dominios simplemente conexos.

1. Sea $\Omega = \mathbb{C} \setminus \{a, b\}$, $a \neq b$, y sea γ la curva en la siguiente figura:



   i) Mostrar que $\eta(\gamma, a) = \eta(\gamma, b) = 0$.

   ii) *Convencerse* de que γ no es homotópica a cero en Ω.

2. Probar que si Ω es simplemente conexo y $f : \Omega \to \mathbb{C}$ es holomorfa, entonces f tiene una primitiva en Ω. ¿Es necesaria la hipótesis de simplemente conexo?

3. (a) Sea Ω un abierto simplemente conexo y sea $f : \Omega \to \mathbb{C}$ holomorfa y tal que $f(z) \neq 0$ para todo $z \in \Omega$. Sean $z_0 \in \Omega$ y $w_0 \in \mathbb{C}$ tales que $e^{w_0} = f(z_0)$. Demostrar que existe una función holomorfa $g : \Omega \to \mathbb{C}$ tal que $f(z) = e^{g(z)}$ para todo $z \in \Omega$ y $g(z_0) = w_0$. (Sugerencia: tomar g tal que $g' = \frac{f'}{f}$ y mostrar que $h = e^{-g} f$ es constante.)

   (b) Demostrar que tal g es única.

   (c) Decidir si en las condiciones del ítem (a), vale que para todos $z_1, z_2 \in \Omega$, $f(z_1) = f(z_2) \Longrightarrow g(z_1) = g(z_2)$.

   (d) ¿Es necesaria la hipótesis de "simplemente conexo" en el ítem (a)?

4. Sean f y g dos funciones enteras. Probar que $f^2(z) + g^2(z) = 1$ para todo $z \in \mathbb{C}$ si y sólo si existe una función entera h tal que $f(z) = \cos(h(z))$ y $g(z) = \operatorname{sen}(h(z))$. (Sugerencia: notar que $1 = (f + ig)(f - ig)$, luego $(f + ig)(z) \neq 0$ para todo $z \in \Omega$.)

5. Evaluar $\displaystyle\int_\gamma \frac{dz}{z^2+1}$, donde $\gamma(\theta) = 2|\cos(2\theta)|e^{i\theta}$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$.