Álgebra 3

Segundo cuatrimestre — 2019

Práctica 4: Extensiones galoisianas

1. Si E/K y L/K son dos extensiones isomorfas de un cuerpo K, entonces los correspondientes grupos de Galois son isomorfos. ¿Vale la recíproca?

2. Describa los grupos de Galois de los cuerpos de descomposición de los polinomios

(a) $X^p - a$ sobre $\mathbb{Q}$, con $p \in \mathbb{N}$ primo y $a \in \mathbb{N} \setminus \mathbb{N}^p$;
(b) $X^4 + 2$ sobre $\mathbb{Q}$ y sobre $\mathbb{Q}(i)$;
(c) $\prod_{i=1}^{n} \left(X^2 - p_i\right)$ sobre $\mathbb{Q}$, con $p_1, \ldots, p_n \in \mathbb{N}$ primos distintos.

3. Sea $E = \mathbb{Q}\left(\sqrt{2+\sqrt{2}}\right)$. Calcule el grado de la extensión $E/\mathbb{Q}$ y verifique que se trata de una extensión normal. Describa $\mathsf{Gal}(E/\mathbb{Q})$ y encuentre todas las subextensiones de grado 2 de $E/\mathbb{Q}$.

4. (a) Describa todas las subextensiones del cuerpo de descomposición del polinomio $\left(X^2-2\right)\left(X^2-3\right)\left(X^2-5\right)$ sobre $\mathbb{Q}$.
(b) Describa todas las subextensiones de grado 2 del cuerpo de descomposición del polinomio $X^4 - 2X^2 - 1$ sobre $\mathbb{Q}$.

5. Si K es un cuerpo de característica distinta de 2 y α, $\beta \in K$ son tales que ni α, ni β ni $\alpha\beta$ son cuadrados en K, describa el grupo de Galois de la extensión $K(a,b)/K$, con $a^2 = \alpha$ y $b^2 = \beta$.

6. Sea K un cuerpo de característica distinta de 2.

(a) Si E/K es una extensión galoisiana tal que $\mathsf{Gal}(E/K) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, existen a, $b \in E$ tales que a^2, $b^2 \in K$ y $E = K(a,b)$.
(b) Generalice este enunciado al caso en que $\mathsf{Gal}(E/K) \cong (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^n$ con $n \geq 1$.

7. Para cada $n \geq 1$ sea $\zeta_n \in \mathbb{C}$ una raíz n-ésima primitiva de la unidad.

(a) Si $\Phi_n = m(\zeta_n, \mathbb{Q})$ es el polinomio minimal de ζ_n sobre $\mathbb{Q}$, y $K/\mathbb{Q}$ es una extensión tal que Φ_n es irreducible en $K[X]$, entonces $K(\zeta_n)/K$ es una extensión galoisiana de grado $\varphi(n)$, y $\mathsf{Gal}\left(K\left(\zeta_n\right)/K\right) \cong (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times$.
(b) Si $K = \mathbb{Q}\left(\sqrt[3]{2}\right)$, describa $\mathsf{Gal}\left(K\left(\zeta_{20}\right)/K\right)$.

8. (a) $\mathbb{Q}\left(\cos\frac{2\pi}{11}\right)/\mathbb{Q}$ es la única subextensión de grado 5 de $\mathbb{Q}\left(\zeta_{11}\right)/\mathbb{Q}$.
(b) $\mathbb{Q}\left(\zeta_{11}\right)/\mathbb{Q}$ tiene una única subextensión de grado 2.

9. Sea E/K una extensión galoisiana de grado 15. Muestre que E/K tiene exactamente dos subextensiones propias, pruebe que estas son galoisianas y calcule sus grados.

10. Una subextensión de grado 3 de una extensión galoisiana de grado 45 es ella misma galoisiana.

11. Sea $p \in \mathbb{N}$ primo y sea E/K una extensión galoisiana de grado mp^n con $n \in \mathbb{N}$ y $(p, m) = 1$.

(a) La extensión E/K tiene subextensiones de grado m y son isomorfas dos a dos.

(b) Si $p > m$, entonces hay una única subextensión de grado m y es galoisiana.

12. (a) Toda extensión galoisiana tiene una subextensión abeliana máxima, esto es, un subextensión abeliana que contiene a todas las subextensiones abelianas.

(b) Si E es el cuerpo de descomposición del polinomio $X^4 - 2$ sobre $\mathbb{Q}$, encuentre la subextensión abeliana máxima de $E/\mathbb{Q}$.

13. (a) Sean E/K y F/K dos subextensiones de grado finito de una extensión L/K. La extensión compuesta EF/K es abeliana sii E/K y F/K son abelianas.

(b) Existen extensiones finitas $E/\mathbb{Q}$ y $F/\mathbb{Q}$ tales que $EF/\mathbb{Q}$ es galoisiana pero ni $E/\mathbb{Q}$ ni $F/\mathbb{Q}$ lo son.

14. El cuerpo de descomposición de un polinomio irreducible con coeficientes racionales de grado al menos dos y con exactamente una raíz real no es una extensión abeliana de $\mathbb{Q}$.

15. Sea $E = \mathbb{C}(X)$, sea $n \geq 2$ y consideremos los automorfismos f, $g \in \mathrm{Aut}(E)$ tales que $g(X) = X^{-1}$ y $f(X) = \xi_n X$, con ξ_n una raíz n-ésima primitiva de la unidad.

(a) Se tiene que $f^n = g^2 = id_E$ y $fg = gf^{-1}$.

(b) El subgrupo G generado por f y g en $\mathrm{Aut}(E)$ es isomorfo a D_n.

(c) El subcuerpo fijo E^G es $\mathbb{C}(X^n + X^{-n})$.

16. Sea K un cuerpo y sea X trascendente sobre K.

(a) Si $f = g/h$ con g, $h \in K[X]$ polinomios coprimos y no ambos constantes, entonces

$$[K(X) : K(f)] = \max\{\deg g, \deg h\}.$$

(b) Si $\phi : K(X) \to K(X)$ es un automorfismo K-lineal, existen a, b, c, $d \in K$ tales que $ad - bc \neq 0$ y $\phi(X) = \frac{aX+b}{cX+d}$.

(c) Hay un isomorfismo de grupos $\mathrm{Aut}(K(X)/K) \cong \mathrm{PGL}(2, K)$.

17. Sea K un cuerpo finito de q elementos y sea X trascendente sobre K.

(a) El grupo $G = \mathrm{Aut}(K(X)/K)$ tiene $q^3 - q$ elementos y está generado por los automorfismos f_a, g_b y h de $K(X)$ definidos por

$$\begin{aligned} f_a(X) &= aX, \quad a \in K^\times; \\ g_b(X) &= X + b, \quad b \in K; \\ h(X) &= X^{-1}. \end{aligned}$$

(b) El subcuerpo fijo E^G es $K(Y)$ con

$$Y = \frac{\left(X^{q^2} - X\right)^{q+1}}{(X^q - X)^{q^2+1}}.$$

Évariste Galois
1811–1832, Francia