Álgebra 3

Segundo cuatrimestre — 2019

Práctica 1: Extensiones

1. Sean E/K una extensión y $\alpha \in E$ un elemento algebraico sobre K. Si F/K es una subextensión de E/K, entonces $m(\alpha, F)$ divide a $m(\alpha, K)$. Muestre que $m(\alpha, F)$ y $m(\alpha, K)$ pueden ser tanto iguales como distintos.

2. Determine los siguientes polinomios minimales

(a) $m\left(\sqrt[4]{2}, \mathbb{Q}\right)$;	(c) $m\left(\sqrt[4]{-1}, \mathbb{Q}(i)\right)$;	(e) $m\left(\sqrt[4]{-1}, \mathbb{Q}\right)$;
(b) $m\left(\sqrt{2-\sqrt{3}}, \mathbb{Q}\right)$;	(d) $m\left(\sqrt[4]{2}, \mathbb{Q}(\sqrt{2})\right)$;	(f) $m(w, \mathbb{R})$, si $w \in \mathbb{C}$.

3. Determine los grados de las siguientes extensiones:

(a) $\mathbb{Q}\left(\sqrt[4]{2}\right)/\mathbb{Q}\left(\sqrt{2}\right)$; (b) $\mathbb{Q}\left(\sqrt{2}, i\right)/\mathbb{Q}$; (c) $\mathbb{Q}\left(\sqrt[3]{3}, \sqrt[5]{7}\right)/\mathbb{Q}$.

4. (a) Determine el grado de $\mathbb{Q}\left(\sqrt{2}, \sqrt{3}\right)$ y de $\mathbb{Q}\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)$ sobre $\mathbb{Q}$, y concluya que $\mathbb{Q}\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right) = \mathbb{Q}\left(\sqrt{2}, \sqrt{3}\right)$.

(b) Encuentre un $\alpha \in \mathbb{C}$ tal que $\mathbb{Q}(\alpha) = \mathbb{Q}\left(\sqrt[3]{2}, \sqrt{3}\right)$ y calcule su polinomio minimal sobre $\mathbb{Q}$.

5. Muestre que $\mathbb{Q}\left(\sqrt{2-\sqrt{3}}\right) = \mathbb{Q}\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)$ y determine el grado de este cuerpo sobre $\mathbb{Q}$.

6. Sea E/K una extensión finita de cuerpos. Si $\alpha \in E$, consideremos la función $L_\alpha : x \in E \mapsto \alpha x \in E$, que es K-lineal. El polinomo minimal de α sobre K coincide con el polinomio minimal de L_α. ¿Cuándo es $m(\alpha, K)$ igual al polinomio *característico* de L_α?

7. Una extensión E/K es algebraica sii todo anillo A con $K \subseteq A \subseteq E$ es un cuerpo.

8. Si $a \in \mathbb{Z}[i]$ es un elemento irreducible, determine el cuerpo primo K de $\mathbb{Z}[i]/(a)$ y el grado $[\mathbb{Z}[i]/(a) : K]$.

9. Sean L/K y M/K subextensiones finitas de una extensión F/K.

(a) Si los grados de L/K y de M/K son coprimos, entonces

$$[LM : K] = [L : K][M : K].$$

(b) Si $[LM : K] = [L : K][M : K]$, entonces $L \cap M = K$. ¿Vale la afirmación recíproca?

10. El polinomio $X^5 + 6X^3 + 15X^2 + 3$ es irreducible en $\mathbb{Q}\left(\sqrt{2}, \sqrt{3}\right)[X]$.

11. Sea F/K una extensión finita de cuerpos.

(a) Si F/K tiene grado impar y $F = K(u)$, entonces también $F = K\left(u^2\right)$.

(b) Si F/K tiene grado primo, entonces F/K no posee cuerpos intermedios.

12. (a) Describa todas las extensiones cuadráticas de un cuerpo de característica distinta de dos.

(b) Sea $f = X^2 + X + 1 \in \mathbb{F}_2[X]$ y sea α una raíz de f en una clausura algebraica de $\mathbb{F}_2$. Muestre que no existe $\beta \in \mathbb{F}_2(\alpha)$ tal que $m(\beta, \mathbb{F}_2) = X^2 + c$ con $c \in \mathbb{F}_2$.

†(c) Describa todas las extensiones cuadráticas de un cuerpo de característica dos.

13. Si $b \in \mathbb{Q}$, sea α_b una raíz de $f_b(X) = X^2 + bX + b^2$. Describa las extensiones $\mathbb{Q}(\alpha_b)/\mathbb{Q}$ y determine sus grados.

14. Si $n \in \mathbb{N}$, sea $\zeta_n \in \mathbb{C}$ una raíz n-ésima primitiva de la unidad.

(a) Determine $m\left(\zeta_p, \mathbb{Q}\right)$ si p es primo.

(b) Calcule $m(\zeta_6, \mathbb{Q})$.

(c) Es $m(\zeta_n, \mathbb{Q}) = \sum_{i=0}^{n-1} X^i$ sii n es primo.

15. Muestre que $m\left(\zeta_5 + \zeta_5^{-1}, \mathbb{Q}\right) = X^2 + X - 1$, deduzca que $\mathbb{Q}(\zeta_5)/\mathbb{Q}$ admite una subextensión cuadrática y determínela explícitamente.

16. Sea $p \in \mathbb{N}$ primo e impar y sea $a \in \mathbb{Q}^\times \setminus (\mathbb{Q}^\times)^p$. Sea $\omega \in \mathbb{C}$ tal que $\omega^p = a$.

(a) Muestre que $m(\omega, \mathbb{Q}) = X^p - a$.

(b) Sea $K \subseteq \mathbb{C}$ la extensión de $\mathbb{Q}$ generada por las raíces de $X^p - a$. Determine el grado de K sobre $\mathbb{Q}$ y sobre $\mathbb{Q}(\omega)$.

17. El conjunto $\mathbb{Q}_{\mathsf{alg}}$ de los elementos de $\mathbb{C}$ que son algebraicos sobre $\mathbb{Q}$ es un subcuerpo de $\mathbb{C}$ y $\mathbb{Q}_{\mathsf{alg}}/\mathbb{Q}$ es una extensión algebraica que no es finita.

18. Sea $(p_i)_{i\in\mathbb{N}}$ una enumeración de los primos racionales.

(a) Encuentre el grado de $\mathbb{Q}\left(\sqrt{p_1}, \dots, \sqrt{p_n}\right)$ sobre $\mathbb{Q}$, y determine el número de subextensiones cuadráticas de esa extensión.

(b) Calcule $\left[\mathbb{Q}\left(\sqrt{p_i}, i \in \mathbb{N}\right) : \mathbb{Q}\right]$.

(c) ¿Es la extensión $\mathbb{Q}\left(\sqrt{p_i}, i \in \mathbb{N}\right)/\mathbb{Q}$ finitamente generada?

(d) Si K es un cuerpo algebraicamente cerrado tal que $\mathbb{Q} \subseteq K \subseteq \mathbb{C}$, ¿cuánto vale $[K : \mathbb{Q}]$?

19. Toda extensión algebraica de grado infinito contiene subextensiones finitas de grado arbitrariamente grande.

20. (a) Un cuerpo algebraicamente cerrado es infinito.

(b) Si E/K es una extensión algebraica, determine el cardinal de E en términos del de K.

(c) Existen cuerpos algebraicamente cerrados de todos los cardinales infinitos.

(d) El conjunto de elementos trascendentes de $\mathbb{R}$ es no numerable.

21. Sea K un cuerpo.

(a) Si t es trascendente sobre K y $n \in \mathbb{N}$, determine el polinomio $m(t, K(t^n))$ y el grado de la extensión $K(t)/K(t^n)$.

(b) Si $t_1, \dots, t_n$ es una familia algebraicamente independiente sobre K y $e_1, \dots, e_n$ son enteros no negativos, calcule

$$\left[K(t_1, \dots, t_n) : K\left(t_1^{e_1}, \dots, t_n^{e_n}\right)\right].$$

22. Si K es un cuerpo y $f \in K[X]$ es un polinomio no constante, entonces

$$[K(X) : K(f)] = \deg f.$$

23. Sea E/K una extensión de cuerpos y sean x e y elementos de E. Determine cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas y, por supuesto, justifique sus respuestas:

(a) Si x e y son trascendentes sobre K, entonces los elementos xy y $x+y$ no son ambos algebraicos sobre K.

(b) Si x es trascendente sobre K e y e algebraico sobre K, entonces $x+y$ es trascendente sobre K.

(c) Si x es trascendente sobre K e y e algebraico sobre K, entonces xy es trascendente sobre K.

(d) Si x es trascendente sobre K e y es trascendente sobre $K(x)$, entonces el conjunto $\{x, y\}$ es algebraicamente independiente sobre K.

(e) Si x e y son trascendentes sobre K, entonces el conjunto $\{x, y\}$ es algebraicamente independiente sobre K.

24. (a) Si d un entero libre de cuadrados, entonces hay exactamente dos morfismos de cuerpos $\mathbb{Q}(\sqrt{d}) \to \mathbb{C}$ y ambos tienen a $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$ como imagen.

(b) Si d es un entero libre de cubos, entonces hay exactamente tres morfismos de cuerpo $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{d}) \to \mathbb{C}$, pero en general sus imagenes no están contenidas en $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{d})$. ¿Cuántos morfismos $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{d}, \zeta_3) \to \mathbb{C}$ hay y qué puede decir de sus imágenes?

Ernst Steinitz
1871–1928, Alemania

Steinitz escribió en 1910 un artículo llamado *Algebraische Theorie der Körper*, publicado en el *Journal de Crelle*, en el que estudió por primera vez a los cuerpos desde el punto de vista axiomático. Ahí se dieron por primera vez las definiciones de cuerpo primo, de cuerpo perfecto de grado de trascendencia y muchas otras. Fue el primero en probar que todo cuerpo posee una clausura algebraica. Suya es la idea que subyace a la prueba usual de que todo par de bases de un espacio vectorial tiene el mismo cardinal, y a la de que todo par de bases de trascendencia de un cuerpo tienen el mismo cardinal: el llamado lema de intercambio de Steinitz.

Un teorema famoso de Steinitz afirma que un cuerpo algebraicamente cerrado queda determinado por grado de trascendencia sobre su cuerpo primo y su característica.