
ÁLGEBRA II

Segundo Cuatrimestre — 2019

Práctica 8: Módulos finitamente generados sobre un DIP

1. Clasificar a menos de isomorfismo los grupos abelianos de orden 18, 45, 100 y 180.
2. Sean A un dominio de ideales principales y M un A -módulo finitamente generado. Mostrar que:
 - (a) M es de torsión sii $\text{hom}_A(M, A) = 0$; y
 - (b) M es indescomponible sii o bien $M \cong A$ o bien existen $p \in A$ irreducible y $n \in \mathbb{N}$ tales que $M \cong A/\langle p^n \rangle$.
3. Sea $p \in \mathbb{N}$ un número primo. Encontrar todos los grupos abelianos de orden p^2 , p^3 , p^4 y p^5 .
4. Sean G un grupo abeliano finito y $p \in \mathbb{N}$ un número primo que divide al orden de G . Probar que el número de elementos de orden p de G es coprimo con p .
5. (a) Hallar los factores invariantes de los siguientes grupos abelianos:
 - (a) $\mathbb{Z}_4 \oplus \mathbb{Z}_6 \oplus \mathbb{Z}_9$;
 - (b) $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_8 \oplus \mathbb{Z}_{14}$;
 - (c) $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_{49} \oplus \mathbb{Z}$;
 - (d) $\mathbb{Z}_{12} \oplus \mathbb{Z}_{21} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_{20} \oplus \mathbb{Z}_9 \oplus \mathbb{Z}_7$.(b) Hallar los factores invariantes de un grupo abeliano G de orden 36 que tiene exactamente 2 elementos de orden 3 y que no tiene elementos de orden 4.
(c) Hallar los factores invariantes de un grupo abeliano G de orden 225 que tiene por lo menos 40 elementos de orden 15 y tal que todo subgrupo de orden 9 es isomorfo a $\mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z}_3$.
6. Determinar los factores invariantes de los siguientes grupos abelianos dados por generadores y relaciones:
 - (a) $G = \langle a, b, c \rangle$; $2a + 3b = 0$, $2a + 4c = 0$.
 - (b) $G = \langle a, b, c \rangle$; $a = 3b$, $a = 3c$.
 - (c) $G = \langle a, b, c \rangle$; $3a = -c$, $3a = 3c - 8b$.
 - (d) $G = \langle a, b, c \rangle$; $3a = b$, $b = 3c$.
7. Hallar los factores invariantes de los siguientes cocientes:
 - (a) \mathbb{Z}^4/S , con $S = \{x \in \mathbb{Z}^4 : x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0, x_1 + x_2 - 2x_3 = 0\}$.
 - (b) \mathbb{Z}^3/S , con $S = \{x \in \mathbb{Z}^3 : x_1 \text{ es par}, x_1 + 5x_2 - x_3 = 0\}$.
 - (c) \mathbb{Z}^3/S , con $S = \{x \in \mathbb{Z}^3 : x_1 = x_2 + x_3 \text{ es par}, 3 \mid x_3\}$.

8. Sean p, q, r primos distintos. Determinar la cantidad de grupos no isomorfos de orden n en cada caso:

(a) $n = p^6 q^3 r$.

(b) $n = p^2 q^4 r^5$.

(c) $n = p^3 q^4$.

9. Sea $G \subseteq \mathbb{Z}^n$ un subgrupo.

(a) Probar que $[\mathbb{Z}^n : G]$ es finito sii G tiene rango n .

(b) Si G tiene rango n y $\{g_1, \dots, g_n\}$ es una base de G , sea $M \in M_n(\mathbb{Z})$ la matriz que tiene a los g_i como columnas. Mostrar que $[\mathbb{Z}^n : G] = |\det M|$.

10. Probar que dos matrices de 3×3 con coeficientes en un cuerpo k son semejantes sii tienen el mismo polinomio característico y el mismo polinomio minimal. Mostrar con un ejemplo que no vale la afirmación análoga para matrices de 4×4 .

11. Hallar la forma racional de $\begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{Q})$.

12. Sean $A = \mathbb{R}[x]/\langle(x^2 + 1)^2\rangle$ y $J = \langle x^2 + 1 \rangle \leq A$. Probar que todo A -módulo finitamente generado es isomorfo a $A^m \oplus (A/J)^n$ para un único par de enteros no negativos (m, n) .