
ÁLGEBRA II

Segundo Cuatrimestre — 2019

Práctica 7: Módulos - Segunda Parte

1. Condiciones de cadena

1.1. *Anillos de matrices.* Sea $n \in \mathbb{N}$. Probar que un anillo A es noetheriano a izquierda sii $M_n(A)$ es noetheriano a izquierda.

1.2. Probar que un dominio íntegro artiniiano es un cuerpo.

1.3. Probar que:

- (a) Un grupo abeliano artiniiano es de torsión.
- (b) Un grupo abeliano es artiniiano y noetheriano sii es finito.

1.4. *Extensiones finitas de anillos.* Sea B un subanillo de un anillo A tal que A es finitamente generado como B -módulo a izquierda. Probar que si B es noetheriano a izquierda, entonces A es noetheriano a izquierda.

1.5. *Álgebras de matrices formales.* Sean A y B anillos y sea M un A - B -bimódulo. Sea T el grupo abeliano $A \oplus M \oplus B$. Dados $a \in A, m \in M$ y $b \in B$, notamos por $\begin{pmatrix} a & m \\ 0 & b \end{pmatrix}$ al elemento $(a, m, b) \in T$.

(a) Probar que la fórmula

$$\begin{pmatrix} a & m \\ 0 & b \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a' & m' \\ 0 & b' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} aa' & am' + mb' \\ 0 & bb' \end{pmatrix}$$

define un producto asociativo en T . Concluir que $(T, +, \cdot)$ es un anillo, el cual también notamos por $\begin{pmatrix} A & M \\ 0 & B \end{pmatrix}$.

(b) Probar que T es noetheriano a izquierda, resp. a derecha, si y solo si A y B son noetherianos a izquierda, resp. a derecha, y M es finitamente generado como A -módulo a izquierda, resp. B -módulo a derecha.

(c) Probar que $T = \begin{pmatrix} \mathbb{Z} & \mathbb{Q} \\ 0 & \mathbb{Q} \end{pmatrix}$ no es isomorfo a su anillo opuesto.

2. Módulos libres, proyectivos e inyectivos

2.1. Sean A un anillo y G un grupo. Probar que $A[X]$ y $A[G]$ son A -módulos libres.

2.2. Sea A un anillo conmutativo.

- (a) Probar que cualquier subconjunto $\{a_1, a_2\} \subseteq A$ es linealmente dependiente. Concluir que si un ideal no nulo $I \subseteq A$ es un A -módulo libre, entonces $I \cong A$ como A -módulo —de donde sigue que I es un ideal principal.
- (b) Sea $A = \mathbb{Z}[X]$. Probar que $I = \langle 2, X \rangle$ no es un A -módulo libre.

2.3. Sea A un dominio íntegro y sean $v_1, \dots, v_n \in A^n$. Sea $M \in M_n(A)$ la matriz cuyas columnas son los vectores v_1, \dots, v_n . Probar las siguientes afirmaciones:

- (a) El conjunto $\{v_1, \dots, v_n\}$ es linealmente independiente si y solo si $\det M \neq 0$.
- (b) El conjunto $\{v_1, \dots, v_n\}$ es un sistema de generadores si y solo si $\det M$ es una unidad.

2.4. Un producto arbitrario de módulos libres puede no ser libre. Sea $M = \prod_{i=1}^{\infty} \mathbb{Z} = \mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$; los elementos de M son sucesiones de números enteros indexadas por \mathbb{N} . El objetivo de este ejercicio es probar que M no es un \mathbb{Z} -módulo libre. Sea N el submódulo de M formado por las sucesiones de soporte finito —es decir, aquellas que tienen finitos coeficientes no nulos. Supongamos que M es un \mathbb{Z} -módulo libre con base B .

- (a) Probar que N es numerable.
- (b) Probar que existe un subconjunto $B_1 \subseteq B$ tal que N está contenido en el submódulo N_1 generado por B_1 . Probar que N_1 también es numerable.
- (c) Sea $\overline{M} = M/N_1$. Probar que \overline{M} es un \mathbb{Z} -módulo libre. Deducir que si $\bar{x} \in \overline{M}$ es no nulo, entonces existen finitos enteros k tales que $\bar{x} = k\bar{y}$ para algún $\bar{y} \in \overline{M}$ (\bar{y} depende de k).
- (d) Sea $S = \{(b_1, b_2, b_3, \dots) \in \mathbb{Z}^{\mathbb{N}} \mid b_i = \pm i! \text{ para todo } i\}$. Probar que S es no numerable y deducir que existe $s \in S$ con $s \notin N_1$.
- (e) Mostrar que la suposición de que M es libre lleva a una contradicción: Por (d) podemos elegir $s \in S$ con $s \notin N_1$. Probar que para cada entero k existe algún $y \in M$ tal que $\bar{s} = k\bar{y}$, contradiciendo (c).

2.5. Bases duales. Sean A un anillo y P un A -módulo a izquierda. Una *base dual* para P es una familia $\{(x_i, f_i)\}_{i \in I}$ donde $(x_i, f_i) \in P \times P^*$ para cada $i \in I$, que cumple las siguientes condiciones:

- (i) para todo $x \in P$ el conjunto $\{i \in I : f_i(x) \neq 0\}$ es finito, y
- (ii) para todo $x \in P$ vale la igualdad $x = \sum_{i \in I} f_i(x)x_i$.

Notar que (i) implica que la suma en (ii) tiene sentido.

- (a) Mostrar que un A -módulo P es proyectivo si y solo si posee una base dual.
- (b) Mostrar que un A módulo P es proyectivo y finitamente generado si y solo si posee una base dual finita.

2.6. Para cada A -módulo a izquierda M , sea $M^* = \text{hom}_A(M, A)$ con la estructura de A -módulo a derecha inducida por la estructura de A -módulo a derecha de A . Mostrar que si M es proyectivo y finitamente generado entonces M^* también lo es.

2.7. Resoluciones proyectivas. Sea A un anillo. Probar las siguientes afirmaciones.

- (a) Para cada A -módulo M existe un diagrama

$$\cdots \longrightarrow P_{p+1} \xrightarrow{d^p} P_p \longrightarrow \cdots \longrightarrow P_1 \xrightarrow{d^0} P_0 \xrightarrow{\epsilon} M \longrightarrow 0$$

de A -módulos y morfismos de A -módulos que es exacto, y en el que para cada $p \in \mathbb{N}_0$ el módulo P_p es proyectivo. El morfismo ϵ se llama *aumentación*, y el diagrama obtenido al reemplazar ϵ por 0 es llamado una *resolución proyectiva* de M .

- (b) Los A -módulos P_p pueden elegirse libres para todo $p \in \mathbb{N}_0$.
- (c) Si A es noetheriano a izquierda y M es finitamente generado, entonces los A -módulos P_p pueden elegirse finitamente generados para todo $p \in \mathbb{N}_0$.
- (d) Si $f : M \rightarrow N$ es un morfismo de A -módulos y

$$\cdots \rightarrow P_p \rightarrow P_{p-1} \rightarrow \cdots \rightarrow P_1 \rightarrow P_0 \rightarrow 0$$

y

$$\cdots \rightarrow Q_p \rightarrow Q_{p-1} \rightarrow \cdots \rightarrow Q_1 \rightarrow Q_0 \rightarrow 0$$

son resoluciones proyectivas de M y N , respectivamente, entonces existen morfismos $f_p : P_p \rightarrow Q_p$ para cada $p \geq 0$ que hacen conmutar el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccccccccccc} \cdots & \rightarrow & P_p & \rightarrow & P_{p-1} & \rightarrow & \cdots & \rightarrow & P_1 & \rightarrow & P_0 & \rightarrow & M & \rightarrow & 0 \\ & & \downarrow f_p & & \downarrow f_{p-1} & & & & \downarrow f_1 & & \downarrow f_0 & & \downarrow f & & \\ \cdots & \rightarrow & Q_p & \rightarrow & Q_{p-1} & \rightarrow & \cdots & \rightarrow & Q_1 & \rightarrow & Q_0 & \rightarrow & N & \rightarrow & 0 \end{array}$$

- (e) Encontrar resoluciones proyectivas para
 - (i) un A -módulo proyectivo;
 - (ii) el \mathbb{Z} -módulo \mathbb{Z}_n para cada $n \in \mathbb{Z}$;
 - (iii) el $k[X]$ -módulo $S = k[X]/\langle X \rangle$.

2.8. Sea A un grupo abeliano finito.

- (a) Probar que A no es un \mathbb{Z} -módulo proyectivo.
- (b) Probar que A no es un \mathbb{Z} -módulo inyectivo.

2.9. Probar que \mathbb{Z} no es un \mathbb{Z} -módulo inyectivo, pero \mathbb{Q} y \mathbb{Q}/\mathbb{Z} sí lo son.

2.10. Sea A un dominio de integridad y sea K su cuerpo de fracciones.

- (a) Probar que K es un A -módulo inyectivo.
- (b) Probar que todo K -módulo es un A -módulo inyectivo.

2.11. Probar que si A es un anillo de división entonces todo A -módulo es inyectivo y proyectivo.