Álgebra II
Segundo Cuatrimestre — 2019

Práctica 5: Anillos

1. Definiciones y ejemplos

1.1. Probar que si A es un anillo en el que cada elemento no nulo tiene un inverso a izquierda, entonces A es un anillo de división.

1.2. Sean A un anillo y $a \in A$. Probar que si existe $n \in \mathbb{N}$ tal que a^n es inversible, entonces a es inversible.

1.3. *Anillo opuesto.* Sea A un anillo. Sea $* : A \times A \to A$ la operación definida por

$$a * b = ba, \qquad \forall a, b \in A.$$

Probar que $(A, +, *)$ es un anillo. Se trata del *anillo opuesto de A*, que denotamos por A^{op}.

1.4. Sea A un grupo abeliano. Probar que $\operatorname{End} A$ —el conjunto de endomorfismos de grupo de A— es un anillo con la suma habitual de funciones y la composición como producto.

1.5. *Anillos de matrices.* Sean A un anillo y $n \in \mathbb{N}$. Definimos:

$$M_n(A) = \{a = (a_{ij}) \in A^{n\times n}\}$$
$$M_\infty(A) = \{a = (a_{ij}) \in A^{\mathbb{N}\times\mathbb{N}} : \text{toda fila de } a \text{ tiene finitos coeficientes no nulos}\}$$

Probar que $M_n(A)$ y $M_\infty(A)$ son anillos con la suma y el producto usuales de matrices. Probar que si $n > 1$, entonces $M_n(A)$ es no conmutativo.

1.6. *Anillos de funciones.*

(a) Sean A un anillo y X un conjunto no vacío. Sea A^X el conjunto de todas las funciones $X \to A$. Probar que A^X es un anillo con las operaciones definidas por:

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x)$$
$$(f \cdot g)(x) = f(x)g(x)$$

¿Cuándo es conmutativo?

(b) Sean $n, k \in \mathbb{N}$, $U \subseteq \mathbb{R}^n$ un abierto y sea $C^k(U) \subseteq \mathbb{R}^U$ el conjunto de todas las funciones k veces derivables con continuidad. Probar que $C^k(U)$ es un subanillo de $\mathbb{R}^U$.

1.7. *Anillos de polinomios.* Sea A un anillo, y sea

$$S = \{f : \mathbb{N}_0 \to A \mid \text{existe un conjunto finito } T \subset \mathbb{N}_0 \text{ tal que } f|_{T^c} \equiv 0\}.$$

Definimos operaciones de suma y producto $+, \cdot : S \times S \to S$ de la siguiente manera: para cada $f, g \in S$ y cada $n \in \mathbb{N}_0$,

$$(f+g)(n) = f(n) + g(n)$$

y

$$(f \cdot g)(n) = \sum_{\substack{k,l \geq 0 \\ k+l=n}} f(k)g(l).$$

Mostrar que estas operaciones están bien definidas y que $(S, +, \cdot)$ es un anillo.

Sea X una variable formal. Si $f \in S$ y $T \subset \mathbb{N}$ es tal que $f|_{T^c} \equiv 0$, podemos representar a f por la suma finita formal

$$\sum_{n \in T} f(n) X^n.$$

Con esta notación, las operaciones de S imitan formalmente las correspondientes operaciones entre polinomios. Llamamos a S el *anillo de polinomios con coeficientes en A* y lo notamos $A[X]$.

1.8. Sea A un anillo. Probar que $\mathsf{Z}(M_n(A)) = \mathsf{Z}(A) \cdot \mathsf{id}$.

1.9. Sean G un grupo y A un anillo. Calcular $\mathsf{Z}(A[G])$.

Sugerencia. Mostrar que si $\sum_g a_g \cdot g$ es central, entonces $a_g \in \mathsf{Z}(A)$ para todo $g \in G$ y $a_{ghg^{-1}} = a_h$ para todos $g, h \in G$.

1.10. Sea A un anillo. El *grupo de unidades de A* es el conjunto

$$\mathcal{U}(A) = \{a \in A \mid a \text{ es inversible}\}$$

con la multiplicación de A.

(a) Probar que $\mathcal{U}(A)$ es un grupo.
(b) Hallar las unidades de $\mathbb{Z}$ y $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$.
(c) Sea G un grupo. Probar que $1 \cdot G \subseteq \mathcal{U}(\mathbb{Z}[G])$ pero que no vale la igualdad.

1.11. *Idempotentes.* Sea A un anillo. Un elemento $e \in A$ es *idempotente* si $e^2 = e$. Probar las siguientes afirmaciones.

(a) Si $e \in A$ es idempotente, el subconjunto eAe con las operaciones de A restringidas es un anillo. Se trata de un subanillo de A si y solo si $e = 1$.
(b) Si $e \in A$ es idempotente, entonces $1 - e$ también lo es.
(c) Sea G un grupo finito y sea k un cuerpo en el que $|G| \neq 0$. Probar que

$$e = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} g$$

es un idempotente en $k[G]$.

1.12. *Anillos booleanos.* Un anillo A es *booleano* si todos sus elementos son idempotentes.

(a) Probar que si X es un conjunto, entonces $(\mathcal{P}(X), \triangle, \cap)$ es un anillo booleano —aquí, $\triangle$ es la operación diferencia simétrica.
(b) Probar que un anillo booleano es conmutativo y de característica 2.

2. Morfismos, ideales y cocientes

En toda esta sección, A y B son anillos con unidad.

2.1. *(a)* Mostrar que hay exactamente un morfismo de anillos $\mathbb{Z} \to A$.

(b) Mostrar que hay a lo sumo un morfismo de anillos $\mathbb{Q} \to A$ y que puede no haber ninguno.

2.2. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ un morfismo de anillos. Probar las siguientes afirmaciones.

(a) $f(\mathbb{Q}) \subseteq \mathbb{Q}$, y de hecho $f|_{\mathbb{Q}} = \mathrm{id}_{\mathbb{Q}}$.

(b) La aplicación f es estrictamente creciente.

Concluir que $f = \mathrm{id}_{\mathbb{R}}$.

2.3. Sea k un cuerpo. Decidir en cada caso si existe un morfismo de anillos $f : A \to B$:

(a) $A = \mathbb{Z}[i]$ y $B = \mathbb{R}$;

(b) $A = \mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ y $B = \mathbb{Z}[\sqrt{3}]$;

(c) $A = k$ y $B = M_n(k)$;

(d) $A = M_n(k)$ y $B = k$.

2.4. Probar que si G es un grupo, la siguiente aplicación es una biyección:

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}_{\mathrm{Anillos}}(\mathbb{Z}[G], A) &\to \mathrm{Hom}_{\mathrm{Grp}}(G, \mathcal{U}(A)) \\ f &\mapsto f|_G \end{aligned}$$

2.5. Sea $\mathcal{I}$ una familia de ideales a izquierda (a derecha, biláteros) de A.

(a) Mostrar que $\bigcap_{I \in \mathcal{I}} I$ es un ideal a izquierda (a derecha, bilatéro) de A. Se trata del ideal más grande contenido en todos los ideales de $\mathcal{I}$.

(b) Mostrar que $\sum_{I \in \mathcal{I}} I$ es un ideal a izquierda (a derecha, bilátero) de A. Se trata del ideal más chico que contiene a todos los ideales de $\mathcal{I}$.

2.6. Probar que:

(a) $A[X]/\langle X - 1 \rangle \cong A$;

(b) $\mathbb{Z}[D_n]/\langle R^m - 1 \rangle \cong \mathbb{Z}[D_m]$, si $m \mid n$;

(c) $\mathbb{Z}_{mn} \cong \mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_n$ si m y n son coprimos (Teorema chino del resto).

2.7. Sean $I \subseteq A$ un ideal bilátero y J el ideal generado por I en $A[X]$. Probar que $A[X]/J \cong (A/I)[X]$.

2.8. Sea k un cuerpo. Sean G un grupo y $H \trianglelefteq G$ un subgrupo normal, y consideremos la proyección canónica $\pi : G \to G/H$. Mostrar que π determina un morfismo sobreyectivo de anillos $k[\pi] : k[G] \to k[G/H]$. Describir el núcleo de $k[\pi]$.

2.9. *Ideales biláteros de $M_n(A)$.*

(a) Sean $I \subseteq A$ un ideal bilátero y $n \in \mathbb{N}$. Sea $M_n(I) \subseteq M_n(A)$ el subconjunto de las matrices de $M_n(A)$ que tienen todos sus coeficientes en I. Mostrar que $M_n(I)$ es un ideal bilátero de $M_n(A)$ y que $M_n(A)/M_n(I) \cong M_n(A/I)$.

(b) Probar que si $J \subseteq M_n(A)$ es un ideal bilátero, entonces existe un ideal bilátero $I \subseteq A$ tal que $J = M_n(I)$.

Sugerencia. Tomar $I = \{a \in A \mid a = M_{1,1} \text{ para alguna matriz } M \in J\}$.

(c) Probar que si k es un cuerpo, entonces $M_n(k)$ es simple –es decir que los únicos ideales biláteros de $M_n(k)$ son 0 y $M_n(k)$.

2.10. *Ideales a izquierda de* $M_n(k)$. Sea k un cuerpo.

(a) Sean $V \subseteq k^n$ un subespacio vectorial e I_V el subconjunto de $M_n(k)$ formado por todas las matrices cuyas filas pertenecen a V. Probar que I_V es un ideal a izquierda de $M_n(k)$.

(b) Probar que todo ideal a izquierda de $M_n(k)$ es de la forma I_V para algún subespacio $V \subseteq k^n$.

Sugerencia. Llamar V al conjunto formado por las todas filas de todas las matrices del ideal y probar que es un subespacio.

3. Anillos conmutativos

En esta sección todos los anillos son conmutativos y con unidad.

3.1. Sean I y J ideales de un anillo A.

(a) Probar que $IJ = \{a_1b_1 + \cdots + a_nb_n : a_i \in I, b_i \in J, n \in \mathbb{N}\}$ es un ideal.

(b) Probar que $IJ \subseteq I \cap J$.

(c) Probar que si $I + J = A$, entonces $IJ = I \cap J$.

3.2. Sean $m, n \in \mathbb{N}$. Expresar a los siguientes ideales de $\mathbb{Z}$ como ideales principales:

$$\langle m, n \rangle, \langle m \rangle + \langle n \rangle, \langle m \rangle \cap \langle n \rangle, \langle m \rangle \langle n \rangle.$$

3.3. *(a)* Sea I un ideal de un anillo A. Probar que

$$\sqrt{I} = \{a \in A : \text{existe } r \in \mathbb{N} \text{ tal que } a^r \in I\}$$

es un ideal de A. El ideal $\sqrt{I}$ se llama *radical* de I.

(b) Sea $m \in \mathbb{Z}$. Expresar a $\sqrt{\langle m \rangle}$ como ideal principal.

3.4. Probar que si A es un DIP, entonces todo ideal primo no nulo de A es maximal.

Denotamos por $\mathsf{Spec}\ A$ al conjunto de todos los ideales primos de un anillo A.

3.5. Sean $I_1, \ldots, I_n$ ideales de un anillo A y sea $\mathfrak{p} \in \mathsf{Spec}\ A$ tal que $\cap_{i=1}^n I_i \subseteq \mathfrak{p}$.

(a) Probar que existe $1 \leq i \leq n$ tal que $I_i \subseteq \mathfrak{p}$.

(b) Probar que si $\mathfrak{p} = \cap_{i=1}^n I_i$, entonces $\mathfrak{p} = I_i$ para algún $1 \leq i \leq n$.

3.6. Sea A un anillo. Probar que:

(a) Un ideal $\mathfrak{p} \subseteq A$ es primo sii $A/\mathfrak{p}$ es un dominio íntegro.

(b) Un ideal $\mathfrak{m} \subseteq A$ es maximal sii $A/\mathfrak{m}$ es un cuerpo.

(c) Un ideal maximal de A es primo.

3.7. Probar que $\mathfrak{m} = \langle 3, Y^4 - X, Y^{12} - X^3 + Y - 1\rangle$ es un ideal maximal de $\mathbb{Z}[X,Y]$.

Sugerencia. Estudiar el cociente $\mathbb{Z}[X,Y]/\mathfrak{m}$: para empezar, observar que $\mathbb{Z}[X,Y]/\mathfrak{m} \cong (\mathbb{Z}[X,Y]/\langle 3\rangle)/(\mathfrak{m}/\langle 3\rangle)$... ∎

3.8. Hallar $\mathsf{Spec}\ \mathbb{Z}$. ¿Qué ideales primos de $\mathbb{Z}$ son maximales?

3.9. Sea k un cuerpo. Probar que si $\mathfrak{p} \in \mathsf{Spec}\ k[X]$, entonces existe $f \in \mathfrak{p}$ mónico e irreducible tal que $\mathfrak{p} = \langle f\rangle$. Recíprocamente, todo ideal principal generado por un polinómio mónico e irreducible es un ideal primo de $k[X]$.

3.10. Sea A un anillo. Probar que:

(a) Si $\mathfrak{p} \in \mathsf{Spec}\ A$ y $B \subseteq A$ es un subanillo, entonces $B \cap \mathfrak{p} \in \mathsf{Spec}\ B$.

(b) Si $I \subseteq A$ es un ideal, $f : A \to A/I$ es la proyección canónica y $\mathfrak{p} \in \mathsf{Spec}\ A/I$, entonces $f^{-1}(\mathfrak{p}) \in \mathsf{Spec}\ A$.

(c) Si $I \subseteq A$ es un ideal y $\mathfrak{p} \in \mathsf{Spec}\ A$ es tal que $\mathfrak{p} \supseteq I$, entonces $\mathfrak{p}/I \in \mathsf{Spec}\ A/I$.

3.11. Probar que si $\mathfrak{p} \in \mathsf{Spec}\ \mathbb{Z}[X]$ es tal que $\mathfrak{p} \cap \mathbb{Z} \neq 0$ entonces existe un número primo $p \in \mathbb{N}$ tal que o bien $\mathfrak{p} = \langle p\rangle$ o bien existe un polinomio $f \in \mathbb{Z}[X]$ mónico e irreducible sobre $\mathbb{Z}_p$ tal que $\mathfrak{p} = \langle p, f\rangle$.

Sugerencia. Sea $\mathfrak{p} \in \mathsf{Spec}\ \mathbb{Z}[X]$. Mostrar que $\mathfrak{p} \cap \mathbb{Z}$ es un ideal principal de $\mathbb{Z}$ generado por un número primo p, así que en particular $\langle p\rangle \subseteq \mathfrak{p}$. Considerar ahora el ideal $\mathfrak{p}/\langle p\rangle$ de $\mathbb{Z}[X]/(p) \cong \mathbb{Z}_p[X]$ y usar un ejercicio anterior que describe los ideales primos de este anillo.

3.12. *Nilradical.* Sea A un anillo. Un elemento $a \in A$ es *nilpotente* si existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $a^n = 0$. El *nilradical de A* es el conjunto $\mathsf{nil}(A) = \sqrt{0} = \{a \in A : a \text{ es nilpotente}\}$. Probar que:

(a) $\mathsf{nil}(A)$ es un ideal de A.

(b) $\mathsf{nil}(A/\mathsf{nil}(A)) = 0$.

(c) $\mathsf{nil}(A) = \bigcap_{\mathfrak{p} \in \mathsf{Spec}\ A} \mathfrak{p}$.

(d) Si $x \in \mathsf{nil}(A)$, entonces $1 + x$ es inversible.

3.13. *Radical de Jacobson.* Sea A un anillo. El *radical de Jacobson de A* es la intersección $J(A)$ de todos los ideales maximales de A. Probar que $x \in J(A)$ sii para cada $y \in A$ se tiene que $1 - xy \in \mathcal{U}(A)$.

3.14. *(a)* Probar que el ideal $\langle 2, X\rangle \subseteq \mathbb{Z}[X]$ no es principal.

(b) Probar que el ideal $\langle 2, 1 + \sqrt{-5}\rangle \subseteq \mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ no es principal.

3.15. Sea $A = \mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$. Probar que 2, 3, $1 + \sqrt{-5}$ y $1 - \sqrt{-5}$ son irreducibles en A, no asociados entre sí. Notar que $6 = 2 \cdot 3 = (1 + \sqrt{-5}) \cdot (1 - \sqrt{-5})$ y concluir que A no es un DFU. ejitems