Álgebra II
Segundo Cuatrimestre — 2019
Práctica 4: Solubilidad

Un grupo G es *soluble* si existe una serie de subgrupos

$$1 = H_0 < H_1 < \cdots < H_n = G$$

de modo que $H_i \trianglelefteq H_{i+1}$ para $1 \leq i \leq n-1$ y que H_{i+1}/H_i sea abeliano. Una serie así se dice una *serie soluble* para G.

Disponemos también de otra caracterización equivalente de la solubilidad. Si G es un grupo, llamamos $G^{(0)} = G$ e inductivamente $G^{(n+1)} = [G^{(n)}, G^{(n)}]$ para $n \in \mathbb{N}_0$. Esta serie de grupos se llama la *serie derivada* de G. Un grupo G es soluble sii $G^{(n)} = 1$ para algún n; es decir, si su serie derivada contiene al subgrupo trivial.

1. Calcular para todo n la serie derivada de D_n.

2. ¿Para qué naturales n es S_n soluble?

3. Mostrar que todo p-grupo finito es soluble.

4. Sea G un grupo y $N \trianglelefteq G$. Probar que G es soluble sii N y G/N lo son.

5. Mostrar que cualquier refinamiento de una serie soluble es una serie soluble.

6. Sea $B_n(k)$ el subgrupo de $\mathsf{GL}_n(k)$ dado por las matrices triangulares superiores. Mostrar que $B_n(k)$ es soluble.

Un grupo G es *supersoluble* si existe una serie de subgrupos

$$1 = H_0 < H_1 < \cdots < H_n = G$$

de modo que $H_i \trianglelefteq G$ para $1 \leq i \leq n$ y que H_{i+1}/H_i sea cíclico.

7. Mostrar que S_4 no es supersoluble.

8. Mostrar que todo p-grupo finito es supersoluble.