Álgebra II
Segundo Cuatrimestre — 2019
Práctica 3: Grupos - Tercera Parte

1. Producto directo y producto semidirecto

1.1. Si G y H son grupos, determinar $\mathsf{Z}(G \times H)$.

1.2. *Producto directo interno.* Sea G un grupo.

(a) Sean N y M dos subgrupos normales de G y supongamos que $N \cap M = 1$ y $G = NM$. Mostrar que entonces es $G \cong N \times M$.

(b) Supongamos que G es grupo finito de orden mn con $(m, n) = 1$. Mostrar que si G posee exactamente un subgrupo N de orden n y exactamente un subgrupo M de orden m, entonces G es isomorfo al producto directo de N y M.

†*(c)* Sean $k \in \mathbb{N}$ y $(N_i)_{i=1}^{k}$ una familia de subgrupos normales de G tales que $G = \left\langle \bigcup_{i=1}^{k} N_i \right\rangle$ y para cada $j \in \{1, \ldots, k\}$ se tiene que

$$N_j \cap \left\langle \bigcup_{\substack{1 \leq i \leq k \\ i \neq j}} N_i \right\rangle = 1.$$

Mostrar que entonces $G \cong N_1 \times \cdots \times N_k$.

†*(d)* Otra vez, supongamos que G es finito y sean $N_1, \ldots, N_k$ subgrupos normales de G de órdenes $r_1, \ldots, r_k$ tales que $(r_i, r_j) = 1$ si $1 \leq i, j \leq k$ y $|G| = r_1 \cdots r_k$. Mostrar que $G \cong N_1 \times \cdots \times N_k$.

1.3. Probar que:

(a) $\mathbb{Z}_{mn} \cong \mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_n$ si m y n son coprimos (Teorema chino del resto);

(b) $\mathbb{C}^\times \cong \mathbb{R}_{>0} \times S^1$;

(c) $D_6 \cong S_3 \times \mathbb{Z}_2$.

1.4. Sean $f : H \to H'$ y $g : K \to K'$ dos morfismos de grupos. Probar que la función $f \times g : H \times K \to H' \times K'$ definida por $(h, k) \mapsto (f(h), g(k))$ es un morfismo de grupos.

1.5. Sean H y K dos grupos y sean $S \trianglelefteq H$ y $T \trianglelefteq K$. Probar que $S \times T \trianglelefteq H \times K$ y que

$$\frac{H \times K}{S \times T} \cong (H/S) \times (K/T).$$

1.6. Sean U y V dos grupos. Sean además $f : U \to W$ y $g : V \to W$ dos homomorfismos de grupos. Probar que la aplicación $h : (u, v) \in U \times V \mapsto f(u)g(v) \in K$ es un homomorfismo de grupos sii todo elemento de $f(U)$ conmuta con todo elemento de $h(V)$.

1.7. *Producto semidirecto.*

(a) Sean G y N grupos y sea $\theta : G \to \mathsf{Aut}(N)$ un homomorfismo de grupos. Sea $K = N \times G$ y consideremos el producto en K dado por

$$(n, g) \cdot (n', g') = (n\theta(g)(n'), gg'), \qquad \forall (n, g), (n', g') \in K.$$

Mostrar que, con respecto a este producto, K es un grupo.

Llamamos al grupo K construido el *producto semidirecto (o cruzado) de N por G con respecto a θ* y lo notamos $N \rtimes_\theta G$.

(a) Encontrar homomorfismos 'naturales' de grupo $\iota : N \to N \rtimes_\theta G$ y $\pi : N \rtimes_\theta G \to G$ tales que ι sea inyectivo, π sea sobreyectivo e $\mathsf{im}\,\iota = \mathsf{ker}\,\pi$.

(b) Mostrar que si $\theta = 1$ es el homomorfismo trivial, $N \rtimes_\theta G \cong N \times G$ es simplemente el producto directo.

1.8. *Producto semidirecto interno.* Sea K un grupo y sean G y N subgrupos de K con N normal en K. Probar que las siguientes afirmaciones son equivalentes:

(a) $K = NG$ y $N \cap G = \{1\}$.

(b) $K = GN$ y $N \cap G = \{1\}$.

(c) Todo elemento de K puede escribirse de forma única como un producto de un elemento de N por uno de G.

(d) Todo elemento de K puede escribirse de forma única como un producto de un elemento de G por uno de N.

(e) La composición de la inclusión $\mathrm{incl} : G \hookrightarrow K$ con la proyección canónica $\mathrm{can} : K \twoheadrightarrow K/N$ es un isomorfismo $\tau : G \cong K/N$.

(f) Existe un homomorfismo $\sigma : K \to G$ que se restringe a la identidad de G y cuyo núcleo es N.

Además, cuando estas afirmaciones valen, existen un homomorfismo de grupos $\theta : G \to \mathsf{Aut}(N)$ y un isomorfismo de grupos $\xi : N \rtimes_\theta G \to K$ tales que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd}
N \arrow[r, "\iota"] \arrow[d] & N \rtimes_\theta G \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "\xi"] & G \arrow[d, "\tau"] \\
N \arrow[r, hook, "\mathrm{incl}"] & K \arrow[r, two heads, "\mathrm{can}"] & K/N
\end{tikzcd}$$

Los homomorfismos ι y π del diagrama fueron construidos en el ejercicio **1.7**.

1.9. Mostrar que $S_3 \cong \mathbb{Z}_3 \rtimes_\theta \mathbb{Z}_2$ para un homomorfismo $\theta : \mathbb{Z}_2 \to \mathsf{Aut}(\mathbb{Z}_3)$ apropiado.

1.10. Mostrar que S_n es el producto semidirecto de A_n y $\langle (1\,2) \rangle$.

1.11. Mostrar que $\mathbb{H}$ no puede ser escrito como un producto semidirecto de forma no trivial.

1.12. Probar que $\mathsf{GL}_n(k)$ es un producto semidirecto de $\mathsf{SL}_n(k)$ y $k^\times$.

2. Acciones y teoremas de Sylow

2.1. Si un grupo G actúa sobre un conjunto finito X, el *carácter* de X es la aplicación $\chi_X : G \to \mathbb{N}_0$ dada por

$$\chi_X(g) = |\{x \in X : gx = x\}|, \qquad \forall g \in G.$$

Si no hay ambigüedad sobre X, escribimos simplemente χ.

(a) Probar que si G actúa transitivamente sobre X, entonces

$$\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\chi(g) = 1.$$

Sugerencia. Considerar el conjunto $S = \{(g,x) \in G \times X : gx = x\}$ y contar sus elementos de dos formas distintas.

(b) Probar que en general, si la acción no es necesariamente transitiva, se tiene

$$\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\chi(g) = |X/G|.$$

Aquí, X/G es el conjunto de órbitas de G en X.

†*(c)* Probar que si G actúa transitivamente sobre X y $x_0 \in X$, entonces

$$\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\chi(g)^2 = |X/G_{x_0}|.$$

Aquí, G_{x_0} es el estabilizador de x_0 en G.

Sugerencia. Una forma de hacer esto consiste en contar los elementos del conjunto $S = \{(g,x,y) \in G \times X \times X : gx = x,\ gy = y\}$ de dos formas distintas.

2.2. Sea G un grupo finito y sean H y K subgrupos de G. Sea $X = HK$.

(a) Probar que la siguiente fórmula define una acción de $H \times K$ en X: $(h,k)\cdot x = hxk^{-1}$.

(b) Probar que la acción es transitiva y que el estabilizador del 1 es isomorfo a $H \cap K$.

(c) Deducir de lo anterior que $|H||K| = |HK||H\cap K|$.

2.3. *Subgrupos grandes.* Sabemos que los subgrupos de índice 2 son normales. El objetivo de este ejercicio es demostrar la siguiente generalización:

> **Proposición.** *Sea G un grupo finito, sea p el menor número primo que divide a $|G|$ y sea H un subgrupo de G de índice p. Entonces H es normal.*

Notemos que, en las condiciones de este enunciado, G no posee subgrupos de índice menor que p.

(a) Sea $X = G/H = \{gH : g \in G\}$ el conjunto de coclases a izquierda de H en G; así, $|X| = p$. Consideramos sobre X la acción usual de G por multiplicación, dada por

$$(g, hH) \in G \times X \mapsto ghH \in X.$$

y sea $\theta : G \to S(X)$ el homomorfismo de grupos correspondiente. Mostrar que si $K = \ker\theta$, se tiene que $H \supseteq K$ y, como $\operatorname{im}\theta$ es un subgrupo de $S(X)$, que $|G : K|$ divide a $p!$.

(b) Mostrar que $|G : K| = |G : H|$, para concluir que $H = K$ y, así, que H es normal.

Sugerencia. Para hacerlo, primero observar que $p = |G : H| \leq |G : K|$, de manera que $|G : K| \neq 1$. Si q es un primo que divide a $|G : K|$, lo hecho anteriormente implica que $q \leq p$; esto junto con la elección de p implica que $|G : K| = p^r$ para algún $r \geq 1$. Para terminar, mostrar que debe ser $r = 1$.

Definición. *Sea p un número primo. Un elemento g de G es* p-primario *si su orden es una potencia de p. Un grupo G es un* p-grupo *si el orden de todo elemento de G es una potencia de p.*

2.1. Sea p un número primo. Probar que:

(a) Si G es un p-grupo y H es un subgrupo de G, entonces H es un p-grupo.

(b) Si G es un p-grupo y $f : G \to H$ es un homomorfismo sobreyectivo, H es un p-grupo.

(c) Si G es un grupo, H un subgrupo normal de G y tanto H como G/H son p-grupos, entonces G es un p-grupo.

2.2. Probar que un grupo finito G es un p-grupo sii $|G| = p^r$ para algún $r \geq 1$.

2.3. Sea p un número primo. Probar que un p-grupo finito tiene centro no trivial.

2.4. Mostrar que no hay grupos simples de orden 28 o 312.

2.5. Mostrar que un grupo de orden 12 o 56 no es simple.

2.6. Sea G un grupo de orden pq, con p y q dos primos distintos. Probar que G no es simple.

2.7. Sea G un grupo de orden $p^r m$ con p primo, $r \geq 1$ y $p > m$. Probar que G no es simple.

2.8. Sea G un grupo de orden $p^2 q$ con p y q primos distintos. Probar que G no es simple.

2.9. Mostrar que un grupo de orden menor que 60 no es simple.

2.10. Probar que todo grupo de orden 5.7.17 es cíclico.

2.11. Mostrar que si G es un grupo y P es un subgrupo de Sylow de G, entonces P es un subgrupo característico de $\mathsf{N}(P)$.

2.12. Probar que si todos los subgrupos de Sylow de un grupo finito G son normales, entonces G es el producto directo de sus subgrupos de Sylow. En particular, esto ocurre cuando G es abeliano.