Álgebra II
Primer Cuatrimestre — 2019
Práctica 2: Grupos - Segunda Parte

Morfismos de grupos

1.1. Sean G un grupo y X un conjunto. Sea $x_0 \in X$ y sea

$$\mathsf{ev}_{x_0} : f \in G^X \mapsto f(x_0) \in G.$$

Mostrar que ev_{x_0} es un homomorfismo de grupos. Describir su núcleo e imagen.

1.2. Mostrar que, para cualquier grupo G, existe un isomorfismo $G \cong G^{\mathrm{op}}$ entre G y su grupo opuesto.

1.3. Sea G un grupo.

(a) Mostrar que la función $\mathsf{ev}_1 : f \in \mathsf{hom}_{\mathrm{Grp}}(\mathbb{Z}, G) \mapsto f(1) \in G$ es una biyección.

(b) Describir $\mathsf{hom}_{\mathrm{Grp}}(\mathbb{Z}_n, G)$ para cada $n \in \mathbb{N}$.

1.4. Calcular $\mathsf{hom}_{\mathrm{Grp}}(\mathbb{Q}, \mathbb{Z})$ y $\mathsf{hom}_{\mathrm{Grp}}(\mathbb{Q}, G)$ para un grupo finito G.

1.5. Sean $m, n \in \mathbb{N}$. Mostrar que si m y n son coprimos, entonces $\mathsf{hom}_{\mathrm{Grp}}(\mathbb{Z}_m, \mathbb{Z}_n)$ es trivial. ¿Qué sucede en general?

1.6. Sea G un grupo. En cada caso, encontrar una condición necesaria y suficiente sobre G para que la aplicación indicada resulte un homomorfismo de grupos:

(a) $(g, h) \in G \times G \mapsto gh \in G$

(b) $g \in G \mapsto g^{-1} \in G$

(c) $g \in G \mapsto g^2 \in G$

1.7. Sean G y H grupos. En general, ¿es $\mathsf{hom}_{\mathrm{Grp}}(G, H)$ un subgrupo de H^G? Encontrar condiciones sobre H que garanticen que lo sea.

1.8. Sea G un grupo.

(a) Sean $g \in G$ e $\mathsf{inn}_g : h \in G \mapsto ghg^{-1} \in G$. Mostrar que $\mathsf{inn}_g \in \mathsf{Aut}(G)$.

(b) Mostrar que la aplicación $\mathsf{inn} : g \in G \mapsto \mathsf{inn}_g \in \mathsf{Aut}(G)$ es un homomorfismo de grupos.

(c) Describir el núcleo de inn. Los automorfismos que están en la imagen de G se llaman *automorfismos interiores* y la imagen misma se denota $\mathsf{Inn}(G)$.

(d) Mostrar que $\mathsf{Inn}(G)$ es un subgrupo normal de $\mathsf{Aut}(G)$.

1.9. Sea $f : G \to H$ un homomorfismo de grupos.

(a) Mostrar que $f([G, G]) \subseteq [H, H]$. En particular: si H es abeliano, entonces $[G, G] \subseteq \ker f$.

(b) ¿Es cierto en general que $f(\mathsf{Z}(G)) \subseteq \mathsf{Z}(H)$?

1.10. Sea G un grupo. Un subgrupo $H \subseteq G$ se dice *característico* si $\forall f \in \mathsf{Aut}(G)$, $f(H) \subseteq H$. Probar que:

(a) Si $H \subseteq G$ es un subgrupo característico, entonces $\forall f \in \mathsf{Aut}(G)$, $f(H) = H$.

(b) $\mathsf{Z}(G)$ y $[G, G]$ son característicos.

(c) Si H es un subgrupo característico de G, entonces H es normal en G.

(d) Si un grupo G posee un único subgrupo H de un orden dado, éste es característico.

(e) Si H es un subgrupo característico de G y K es un subgrupo característico de H, entonces H es un subgrupo característico de G.

†*(f)* Si $N \subseteq G$ es un subconjunto característico (es decir, si $\forall f \in \mathsf{Aut}(G)$, $f(N) \subseteq N$), entonces $\langle N \rangle$ y $\mathsf{C}(N)$ son subgrupos característicos de G.

Un subgrupo $H \subseteq G$ se dice *totalmente característico* si $\forall f \in \mathsf{End}(G)$, $f(H) \subseteq H$.

†*(a)* Probar que un subgrupo totalmente característico es característico.

†*(b)* Dar ejemplos de un subgrupo totalmente característico y de un subgrupo característico pero no totalmente característico.

†*(c)* Probar que todos los subgrupos de un grupo cíclico son totalmente característicos. ¿Vale la recíproca?

1.11. Sea G un grupo finito. Supongamos que existe $f \in \mathsf{Aut}(G)$ tal que $f^2 = 1$ y tal que f no deja fijo a ningún elemento de G además del 1. Probar que $\forall g \in G$, $f(g) = g^{-1}$ y que G es abeliano de orden impar.

Sugerencia. Mostrar que la aplicación $\phi : g \in G \mapsto g^{-1} f(g) \in G$ es biyectiva y probar que $f(g) = g^{-1}$ escribiendo a g en la forma $h^{-1} f(h)$ para algún elemento h de G.

Cocientes

2.1. Verificar que $f : \mathbb{R} \to S^1$, $f(x) = e^{2\pi i x}$, es un morfismo de grupos sobreyectivo con $\ker f = \mathbb{Z}$. Concluir que $\mathbb{R}/\mathbb{Z} \cong S^1$.

2.2. Mostrar que:

(a) $\mathbb{C}^\times / \mathbb{R}_{>0} \cong S^1$;

(b) $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}_m$ cualquiera sea $m \in \mathbb{N}$;

(c) $\mathsf{GL}_n(k) / \mathsf{SL}_n(k) \cong k^\times$ si k es un cuerpo y $n \in \mathbb{N}$;

(d) $S^1 / \mathbb{G}_n \cong S^1$ si $n \in \mathbb{N}$;

(e) si $m \mid n$, entonces $\mathbb{G}_n / \mathbb{G}_m \cong \mathbb{G}_{n/m}$;

(f) si $m \mid n$, entonces $D_n / \langle R^m \rangle \cong D_m$.

2.3. Sea G un grupo. Probar que $G/\mathsf{Z}(G) \cong \mathsf{Inn}(G)$.

2.4. Sean G un grupo y H y K subgrupos normales de G.

(a) Mostrar que hay un morfismo inyectivo $G/(H \cap K) \to G/H \times G/K$.

(b) Deducir que si G/H y G/K son abelianos y $G \cap H = 1$ entonces G es abeliano.

(c) Probar que si $G = HK$, entonces el morfismo del item **2.4***(a)* es un isomorfismo.

2.5. *(a)* Sea G un grupo y sean $H, K \subseteq G$ subgrupos de índice finito. Probar que $L = H \cap K$ también tiene índice finito.

†*(b)* Sea G un grupo. Probar que el conjunto de elementos de G que poseen un número finito de conjugados es un subgrupo característico de G.

2.6. Sean G un grupo y $H \subseteq G$ un subgrupo. Probar que $[G, G] \subseteq H$ sii H es normal en G y G/H es abeliano. Esto puede resumirse diciendo que $[G, G]$ es el menor subgrupo por el cual hay que dividir a G para que el cociente quede abeliano.

2.7. Sea G un grupo. Probar que si $G/\mathsf{Z}(G)$ es cíclico, entonces G es abeliano.

El grupo simétrico S_n

3.1. Sea $(a_1 a_2 \dots a_r) \in S_n$ un r-ciclo y sea $\sigma \in S_n$. Probar que:

$$\sigma\,(a_1 a_2 \dots a_r)\,\sigma^{-1} = (\sigma(a_1)\,\sigma(a_2)\,\dots\,\sigma(a_3))$$

3.2. *Generación de S_n.* Mostrar que:

(i) $S_n = \langle \{(i\,j) : 1 \leq i < j \leq n\} \rangle$

(ii) $S_n = \langle \{(1\,i) : 1 \leq i \leq n\} \rangle$

(iii) $S_n = \langle \{(i \;\; i+1) : 1 \leq i < n\} \rangle$

(iv) $S_n = \langle (1\,2),\ (1\,2\,3 \dots n) \rangle$

3.3. Probar que $S_n/A_n \cong \mathbb{G}_2$.

†**3.4.** Calcular $\mathsf{Z}(S_n)$, $\mathsf{Z}(A_n)$, $[S_n, S_n]$ y $[A_n, A_n]$.

3.5. Usando que $\mathsf{GL}_2(\mathbb{F}_2)$ permuta los elementos no nulos de $\mathbb{F}_2^2$, probar que $\mathsf{GL}_2(\mathbb{F}_2) \cong S_3$.

3.6. *(a)* Sea G un grupo y sea $X \subseteq G$ un subconjunto tal que $\langle X \rangle = G$. Probar que si $f \in \mathsf{End}(G)$ es tal que $f(x) = x$ para todo $x \in X$, entonces $f = \mathsf{id}_G$.

(b) Sea X el conjunto de los elementos de orden 2 de S_3. Mostrar que cada automorfismo de S_3 induce una permutación de X y deducir que $\mathsf{Aut}(S_3) \cong S_3$.