Análisis Numérico

Segundo Cuatrimestre 2019

Práctica N° 3: Diferencias Finitas (Ecuaciones Hiperbólicas)

Ejercicio 1 Para resolver la ecuación de convección-difusión

$$U_t = aU_x + \mu U_{xx} \qquad a > 0,\ c \in \mathbb{R}$$

se quiere aproximar la solución con un esquema explícito y centrado de segundo orden en x:

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} = a\frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2\Delta x} + \mu\frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{(\Delta x)^2}$$

(a) Dar condiciones sobre $\Delta t, \Delta x$ que aseguren la estabilidad.

(b) Analizar los resultados casos límite $a = 0$ (problema sin convección) y $\mu = 0$ (problema sin difusión). ¿Qué ocurre?

Ecuación de transporte lineal

Ejercicio 2 Sea a una constante positiva.

(i) Resolver la ecuación $U_t + aU_x = 0$, en toda la recta, con dato inicial $u(x,0) = u_0(x)$. Proceder análogamente con $U_t - aU_x = 0$.

(ii) Reemplazar $e^{i(kx+\omega t)}$ en ambas ecuaciones y hallar ω en cada caso. Concluir que ningún modo es amortiguado y que en un lapso Δt su fase cambia en $-ak\Delta t$.

Ejercicio 3 (**Up-Wind**) Para aproximar la ecuación $U_t + aU_x = 0$ se consideran los métodos:

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + a\frac{u_j^q - u_{j-1}^q}{\Delta x} = 0$$

con $q = n$ (explícito) y $q = n + 1$ (implícito).

(a) Estudiar la estabilidad con el método de Fourier. ¿El resultado depende del signo de a?

Ejercicio 4 (Difusión artificial) Verificar que el esquema explícito con up-wind para la ecuación $U_t + U_x = 0$ puede escribirse como:

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2\Delta x} = \frac{\Delta x}{2}\frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{\Delta x^2}.$$

Observar que esta expresión coincide con la de un esquema centrado en x para la ecuación

$$U_t + U_x = \frac{\Delta x}{2} U_{xx}.$$

Concluir que el método up-wind puede interpretarse como un esquema centrado en x para la ecuación de transporte al cual se le agrega "difusión artificial". Comparar el orden del esquema up-wind con la de este último. ¿Hay alguna contradicción?

Ejercicio 5 (**Lax-Friedrichs**) Para resolver la ecuación $U_t + aU_x = 0$, considerar el siguiente método explícito:

$$\frac{u_i^{n+1} - \frac{1}{2}(u_{i+1}^n + u_{i-1}^n)}{\Delta t} + a\frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2\Delta x} = 0$$

(a) ¿De qué orden es el error de truncado?

(b) Analizar qué restricción debe imponerse para que se satisfaga la condición CFL.

(c) Estudiar la estabilidad mediante el método de Fourier ¿El resultado depende del signo de a?

Ejercicio 6 (**Lax-Wendroff**) Para resolver la ecuación $U_t + aU_x = 0$, se considera el siguiente método explícito:

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} + a\frac{u_{i+1}^n - u_{i-1}^n}{2\Delta x} - \frac{\Delta t}{2}a^2\left(\frac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n}{(\Delta x)^2}\right) = 0$$

(a) Interpretar el método propuesto como una discretización centrada de un problema con "difusión artificial".

(b) ¿De qué orden es el error de truncado en este caso?

(c) Estudiar la estabilidad mediante el método de Fourier ¿El resultado depende del signo de a?

Ejercicio 7 (Leapfrog) Dada la ecuación $U_t + aU_x = 0$ con $a \in \mathbb{R}$ y $U(x, 0) = U_0(x)$ se propone el método de 2 pasos dado por:

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^{n-1}}{2\Delta t} + a\frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2\Delta x} = 0$$

(a) Analizar que restricción debe imponerse para que se satisfaga la condicióon CFL.

(b) ¿Cómo puede aproximarse el valor de la solución a tiempo Δt? ¿Qué condición de borde puede imponerse para resolver el problema numéricamente?

(c) Considerar $a > 0$ y demuestar que si $\frac{\Delta t}{\Delta x} \leq \frac{1}{a}$ el método resulta estable.

Ejercicio 8 Para la ecuación $U_t + aU_x = 0$ se propone un esquema con diferencias a izquierda, de la forma

$$u_j^{n+1} = d_{-2}u_{j-2}^n + d_{-1}u_{j-1}^n + d_0 u_j^n$$

Determinar los coeficientes d_{-2}, d_{-1} y d_0, para que el método tenga un error de truncamiento del mayor orden posible. En tal caso, hallar condiciones que aseguren la validez de la condición CFL y la estabilidad por el método de Fourier.

Ejercicio 9 Implementar los métodos de los ejercicios 3, 5, 6 y 7 para condiciones iniciales $U_0(x) = \sin(kx)$ con k entero y comparar los resultados obtenidos con la solución exacta. ¿Qué ocurre con $U_0(x) = \chi_{[0,1/2]}(x)$?

Ejercicio 10 Muestrar que si $q(x) \approx c_1x + c_2x^2 + c_3x^3 \dots$ para $x \approx 0$ entonces, para $x \approx 0$

$$\operatorname{arctg}(q(x)) = c_1x + c_2x^2 + (c_3 - \frac{1}{3}c_1^3)x^3 \dots$$

Ejercicio 11 (Error de Amplitud y Fase) Estudiar los errores del factor de amortiguamiento $\lambda(k)$ y de fase para el k-ésimo modo que se cometen al resolver la ecuación $U_t + aU_x = 0$ con los métodos de los ejercicios 3, 5, 6 y 7.

Leyes de Conservación

Ejercicio 12 Se considera la Ley de Conservación

$$\frac{d}{dt}\int_{x_1}^{x_2} U dx = f(U(t,x_1)) - f(U(t,x_2)) \qquad \forall x_1, x_2 \in [a,b] \tag{1}$$

Probar que una función U suave que satisface (1) también verifica

$$U_t + f(U)_x = 0 \qquad x \in [a,b]. \tag{2}$$

Probar que la siguiente discretización

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{k} + \frac{f(u_i^n) - f(u_{i-1}^n)}{h} = 0$$

satisface una relación análoga a (1) con $x_1 = a, x_2 = b$, y analizar qué ocurre con la discretización:

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{k} + f'(u_i^n)\frac{u_i^n - u_{i-1}^n}{h} = 0$$

¿Qué error de truncado poseen estos métodos?

Ejercicio 13 Considerar la siguiente *ecuación de Burgers inviscida* (caso particular de (2) para $f(u) = \frac{u^2}{2}$):

$$U_t + UU_x = 0 \qquad x \in \mathbb{R},\ t > 0$$

con dato inicial

$$U(x,0) = U_0(x)$$

(a) Verificar que la solución queda definida implícitamente por $U = U_0(x - Ut)$.

(b) Las curvas características son de la forma $(x(t), t)$ con $x(t) = x_0 + tU_0(x_0)$.

(c) Demostrar que

$$U_x = \frac{U_0'(x - Ut)}{1 + tU_0'(x - Ut)}$$

y por ende si para algún x_0 es $U_0'(x_0) < 0$ entonces existe un tiempo crítico t_c en el cual deja de existir U_x. Haga la misma cuenta para U_t.

Ejercicio 14 Considerar la *ecuación de Burgers inviscida*

$$\begin{aligned} U_t + \frac{1}{2}(U^2)_x &= 0 \quad x \in \mathbb{R},\ t > 0 \qquad \text{(forma conservativa)} \\ U_t + UU_x &= 0 \quad x \in \mathbb{R},\ t > 0 \qquad \text{(forma semi-lineal)} \end{aligned}$$

Implementar las siguientes discretizaciones

$$\text{Up-Wind Conservativo:} \qquad \frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} = -\frac{1}{2}\frac{(u_i^n)^2 - (u_{i-1}^n)^2}{\Delta x}$$

$$\text{Up-Wind No-Conservativo:} \qquad \frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} = -u_i^n\left(u_i^n - u_{i-1}^n\right)$$

para $x \in [0, 10]$ y un tiempo final T_f, con los datos iniciales

(a) $U_0(x) = \chi_{(-\infty,\frac{1}{2})}(x) + 0.2, \quad T_f = 15$ (c) $U_0(x) = \dfrac{e^x}{1 + e^x}, \quad T_f = 30$

(b) $U_0(x) = \chi_{(-\infty,\frac{1}{2})}(x), \quad T_f = 15$ (d) $U_0(x) = \dfrac{e^{-x}}{1 + e^{-x}}, \quad T_f = 30$

y distintos valores de Δt y Δx tendiendo a cero de modo que $\frac{\Delta t}{\Delta x} < 1$.

¿Ambos métodos son convergentes? ¿Convergen al mismo resultado en todos los casos?

Ejercicio 15 Se considera la ecuación $U_t + f(U)_x = 0$. Verificar que para una solución U y f suficientemente regulares se tiene

$$U_{tt} = \left(f'(U)f(U)_x\right)_x.$$

Dar la expansión de Taylor

$$\frac{U(x_j, t_{n+1}) - U(x_j, t_n)}{\Delta t} \sim U_t(x_j, t_n) + \frac{\Delta t}{2}U_{tt}(x_j, t_n) + \ldots$$

reemplazando derivadas temporales por espaciales adecuadamente, y tomando diferencias centradas en el espacio, deducir el método de Lax-Wendroff para la ley de conservación (2)

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} = -\frac{f(u_{j+1}^n) - f(u_{j-1}^n)}{2\Delta x} + \frac{\Delta t}{2\Delta x}\left[f'(u_{j+1/2}^n)\frac{f(u_{j+1}^n) - f(u_j^n)}{\Delta x} - f'(u_{j-1/2}^n)\frac{f(u_j^n) - f(u_{j-1}^n)}{\Delta x}\right]$$

donde $u_{j\pm1/2}^n = \dfrac{u_j^n + u_{j\pm1}^n}{2}$. Observar que si $f' = cte$ se obtiene el método correspondiente del ejercicio 6.

Ecuación de Ondas

Ejercicio 16 Para la ecuación de ondas

$$U_{tt} = U_{xx} \qquad x \in (0,1), \qquad t > 0$$

considerar el método explícito que se obtiene al tomar diferencias centradas en x y en t

$$u_j^{n+1} - 2u_j^n + u_j^{n-1} = r(u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n),$$

donde ahora tomamos $r = (\frac{\Delta t}{\Delta x})^2$

(a) Estudiar consistencia y estabilidad del método propuesto.

(b) Implementar el método, para las condiciones de contorno $U(0,t) = U(1,t) = 0$ e iniciales

$$U(x,0) = \frac{1}{8}\sin(\pi x), \quad U_t(x,0) = 0$$

y comparar la solución numérica contra la solución exacta, para distintos valores de Δt,Δx.

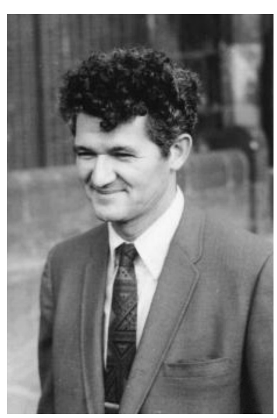
Ejercicio 17 Estudiar la consistencia y estabilidad del siguiente método para $U_{tt} = U_{xx}$:

$$u_j^{n+1} - 2u_j^n + u_j^{n-1} = \frac{1}{2}r\{(u_{j+1}^{n+1} - 2u_j^{n+1} + u_{j-1}^{n+1}) + (u_{j+1}^{n-1} - 2u_j^{n-1} + u_{j-1}^{n-1})\}.$$

Ejercicio 18 Definiendo $P = U_x$ y $Q = U_t$, verificar que la ecuación de ondas $U_{tt} = U_{xx}$ puede escribirse como el siguiente sistema de dos ecuaciones en derivadas parciales de primer orden

$$\begin{cases} Q_t = P_x \\ P_t = Q_x \end{cases}$$

Discretizar cada una de las ecuaciones según Lax-Friedrichs. Probar que la discretización para el sistema de ecuaciones es estable para $\dfrac{\Delta t}{\Delta x} \leq 1$.



Peter Lax
Budapest 1926 -