
ANÁLISIS NUMÉRICO

Segundo Cuatrimestre 2019

Práctica N° 1: Diferencias Finitas (Introducción)

Discretización de derivadas

Ejercicio 1 Para las siguientes discretizaciones de la derivada primera, halle una expresión para el error local y señale las hipótesis de suavidad necesarias sobre la función u para que el orden de precisión sea el indicado en cada caso.

$$u'(x) \sim \frac{u(x+h)-u(x)}{h} \quad (\text{diferencia forward}) \quad O(h)$$

$$u'(x) \sim \frac{u(x)-u(x-h)}{h} \quad (\text{diferencia backward}) \quad O(h)$$

$$u'(x) \sim \frac{u(x+h)-u(x-h)}{2h} \quad (\text{diferencia centrada}) \quad O(h^2)$$

Repita el análisis para la discretización con diferencias centradas de la derivada segunda.

$$u''(x) \sim \frac{u(x+h) - 2u(x) + u(x-h)}{h^2}, \quad \text{de orden } O(h^2)$$

¿Qué hipótesis de suavidad es necesaria en este último caso?

Ejercicio 2 Las siguientes son versiones de orden 2 de las diferencias forward o backward, que utilizan nodos a un solo lado de x .

(a) Verifique que la siguiente fórmula para la derivada primera tiene orden $O(h^2)$:

$$u'(x) \sim -\frac{1}{h} \left(\frac{3}{2}u(x) - 2u(x+h) + \frac{1}{2}u(x+2h) \right)$$

(b) Halle una fórmula de aproximación de orden $O(h^2)$ para la derivada segunda $u''(x)$ que utilice los valores de u en $x, x+h$ y $x+2h$.

(c) ¿En qué intervalo tienen que estar acotadas las derivadas de orden superior?

Problemas de valores iniciales

Ejercicio 3 Dada una constante $a > 0$, considere el problema de valores iniciales para $t > 0$.

$$y'(t) = -ay(t) \quad y(0) = 1$$

Para cada paso temporal Δt fijo se consideran las discretizaciones

$$\frac{y^{n+1}-y^n}{\Delta t} = -ay^n \quad \text{Euler explícito}$$

$$\frac{y^{n+1}-y^n}{\Delta t} = -ay^{n+1} \quad \text{Euler implícito}$$

$$\frac{y^{n+1}-y^n}{\Delta t} = -a \left(\frac{1}{2}y^{n+1} + \frac{1}{2}y^n \right) \quad \text{Método } \theta = \frac{1}{2}$$

Grafique la solución obtenida para $a = 7$, $\Delta t = 0.1$ y $0 < t < 3$. Demuestre que

(a) Para Euler explícito se tiene $|y_n| \rightarrow 0$ si $\Delta t < 2/a$, y $|y^n| \rightarrow \infty$ si $\Delta t > 2/a$.

(b) Para Euler implícito y el Método $\theta = \frac{1}{2}$, $y_n \rightarrow 0$ para todo h .

Ejercicio 4 Dada la ecuación cuadrática $z^2 + bz + c = 0$ con b y c en \mathbb{R} . Demuestre que las raíces están en el círculo unitario $\Leftrightarrow |c| \leq 1$ y $|b| \leq 1 + c$. (Este resultado facilita el análisis de esquemas de 2 pasos).

Ejercicio 5 Considere el problema

$$y''(t) = -ay(t), \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0, \quad 0 < t < T_f,$$

y la discretización explícita de 2 pasos

$$\frac{y^{n+1} - 2y^n + y^{n-1}}{(\Delta t)^2} = -ay^n.$$

(a) Implemente el método y compare con la solución para $a = 1$, $\Delta t = 1$ y $T_f = 120$.

(b) Muestre que $|y^n| \rightarrow \infty$ si $\Delta t > 2/\sqrt{a}$, y que en caso contrario $|y^n|$ permanece acotado.

Sug. Reemplace $y_n = \lambda^n$ y resuelva una ecuación de recurrencia para λ .

Problemas de Valores de Contorno

Ejercicio 6 (Condiciones de Dirichlet). Se desea resolver numéricamente la ecuación de Poisson en una dimensión con condiciones de borde de tipo Dirichlet

$$\begin{cases} u_{xx}(x) = f(x), & \text{para } x \in (0, 1) \\ u(0) = \alpha \\ u(1) = \beta. \end{cases} \quad (1)$$

Para ello se considera la malla uniforme $\{x_j = hj, j = 0, 1, 2, \dots, m+1\}$ con $h = 1/(m+1)$. Para los puntos de la malla $x_j \in (0, 1)$ El esquema de diferencias centradas para la derivada segunda (Ej. 1) conduce al sistema de ecuaciones:

$$\frac{1}{h^2} (U_{j-1} - 2U_j + U_{j+1}) = f(x_j) \quad \text{para } j = 1, 2, 3, \dots, m.$$

Utilizando las condiciones de borde $U_0 = \alpha, U_{m+1} = \beta$ se obtiene el sistema

$$A^h U^h = F^h \quad (2)$$

donde $U^h = [U_1, U_2, \dots, U_m]^T$ es el vector de incógnitas, mientras que la matriz tridiagonal A^h y el vector F^h están dados por:

$$A^h = \frac{1}{h^2} \begin{bmatrix} -2 & 1 & & & & \\ 1 & -2 & 1 & & & \\ & 1 & -2 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 & -2 & 1 \\ & & & & 1 & -2 \end{bmatrix}, \quad F^h = \begin{bmatrix} f(x_1) - \alpha/h^2 \\ f(x_2) \\ f(x_3) \\ \vdots \\ f(x_{m-1}) \\ f(x_m) - \beta/h^2 \end{bmatrix}$$

Se define el error de truncado en la malla como

$$\tau_j^h = (A^h u)_j - u''(x_j), \quad \tau^h = [\tau_1^h, \dots, \tau_m^h]$$

donde u es la solución de (1). Para h fijo, definimos el error puntual en x_j como

$$e_j^h = u(x_j) - U_j^h, \quad e^h = [e_1^h, \dots, e_m^h]$$

- Escriba un programa que permita obtener la solución U dado f .
- Grafique el tiempo de ejecución en función de n si se utilizan matrices llenas con `numpy` o matrices ralas con la librería `scipy.sparse`.
- Demuestre que si $f \in C^2(0, 1)$ existe una constante C independiente de h y de m tal que

$$\max_{1 \leq j \leq m} |\tau_j^h| < Ch^2$$

- Para $f = \sin(2\pi x)$, utilizando la solución exacta grafique $\|e^h\|_\infty$ en función de h y en escala logarítmica, para valores de $h \rightarrow 0$. ¿Cuál es la pendiente que se observa?

Ejercicio 7 (Condiciones de Neumann). Se desea resolver numéricamente la ecuación de Poisson en una dimensión con condiciones de Neumann en $x = 0$ y de Dirichlet en $x = 1$,

$$\begin{cases} u_{xx}(x) = f(x), & \text{para } x \in (0, 1) \\ u_x(0) = 0 \\ u(1) = 0. \end{cases} \quad (3)$$

Obtenga matrices para el problema discreto, si para la condición de Neumann $u_x(0) = 0$ se realizan las siguientes aproximaciones:

- $U_1 - U_0 = 0$ (diferencias forward)
- $U_1 - U_{-1} = 0$ (diferencias centradas y nodo ficticio)
- $\frac{3}{2}U_0 - 2U_1 + \frac{1}{2}U_2$ (diferencias forward de orden 2 del Ej. 2)

Sug. Para el caso del nodo ficticio, añada la ecuación $1/h^2 (U_{-1} - 2U_0 + U_1) = f(x_0)$.

- ¿Cuál es el orden del error de truncado en el interior y el punto $x = 0$ en cada caso?

- (b) Comparando contra la solución exacta en el caso $f = \sin(2\pi x)$ y tomando $e_m = \|U - u\|_\infty$, estudie numéricamente cuál es el orden de aproximación que se observa para la solución del problema en cada caso.

Ejercicio 8 (Capa límite) Considere la *ecuación de convección-difusión*

$$\begin{cases} u_t + au_x = \kappa u_{xx} + \phi, & \text{para } x \in (0, 1) \quad t > 0 \\ u(x, 0) = u_0(x) & x \in (0, 1), \\ u(0, t) = \alpha & t > 0 \\ u(1, t) = \beta & t > 0 \end{cases} \quad (4)$$

para constantes de difusividad $\kappa > 0$ y de convección $a \in \mathbb{R}$ dadas. Llamando $Pe = a/\kappa$ al *número de Péclet* y tomando $\varepsilon = 1/Pe$, verifique que una solución $u(x, t)$ de (4) independiente de t (estacionaria), satisface una ecuación de la forma

$$\varepsilon u_{xx} - u_x = f, \quad u(0) = \alpha \quad u(1) = \beta. \quad (5)$$

cuya solución exacta para el caso $f(x) = 1$ está dada por

$$u_\varepsilon(x) = \alpha + x + (\beta - \alpha - 1) \left(\frac{e^{x/\varepsilon} - 1}{e^{1/\varepsilon} - 1} \right)$$

- (a) Grafique la solución exacta para el caso $\alpha = 1, \beta = 3$ a medida que $\varepsilon \rightarrow 0$. Interprete el significado del término *capa límite* que se suele aplicar al comportamiento de $u_\varepsilon(x)$ para x cerca del borde $\{x = 1\}$ y $\varepsilon \rightarrow 0$. ¿De qué tamaño es la *capa límite*?
- (b) Resuelva numéricamente la ecuación (5) usando diferencias centradas para las derivadas primera y segunda, y una malla de tamaño h . Grafique el error para distintos valores de h y ε . ¿Qué ocurre si $h \gg 2\varepsilon$?
- (c) Resuelva la ecuación (5) pero ahora usando diferencias centradas para la derivada segunda y diferencias forward para la derivada primera. Compare los resultados con los obtenidos anteriormente.

Normas de matrices y radio espectral

Ejercicio 9 Pruebe que para toda $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$

$$\|A\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n |a_{ij}|$$

$$\|A\|_1 = \max_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^n |a_{ij}|$$

$$\|A\|_2 = \sqrt{\rho(A^*A)}$$

Ejercicio 10 Muestre que para cualquier norma vectorial $\|\cdot\|$, se tiene $\| \|A\| \| \geq \rho(A)$.

Ejercicio 11 Dada una matriz A diagonalizable, exhiba una norma vectorial $\|\cdot\|_A$ de modo que $\|A\|_A = \rho(A)$.

Ejercicio 12 Muestre que una matriz diagonalizable $A = K^{-1}\Lambda K$ satisface

$$\rho(A) \leq \|A\|_2 \leq \text{cond}_2(K)\rho(A)$$

Concluya que si A es normal entonces $\|A\|_2 = \rho(A)$.

Ejercicio 13 Exhiba una matriz A para la cual $\rho(A) \leq 1$ y sin embargo $\|A\|_2 > 1$.

Ejercicio 14 Una matriz se dice Toeplitz si es constante a lo largo de cada diagonal y sub-diagonal. Un caso particular es la matriz tridiagonal $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ dada por

$$A = \begin{bmatrix} a & b & & & & & \\ c & a & b & & & & \\ & c & a & b & & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & & c & a & b & \\ & & & & c & a & \end{bmatrix} \quad (6)$$

donde $a, b, c \in \mathbb{R}$. Llamando $h = 1/(n + 1)$ y considerando $w^2 = c/b$, verifique que el q -ésimo autovector r^q de A está dado por

$$r_j^q = w^j \sin(q\pi jh), \quad r^q = [r_1^q, \dots, r_n^q],$$

y que el correspondiente q -ésimo autovalor está dado por

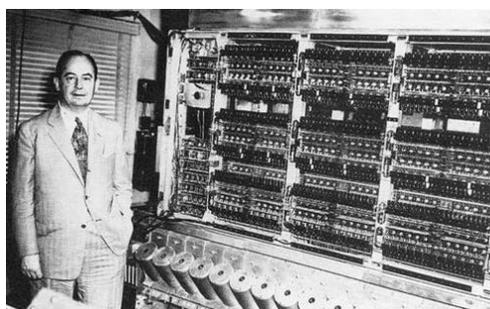
$$\lambda^q = a + 2bw \cos(q\pi h).$$

Ejercicio 15 (Teorema de Gerschgorin) Sea $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ y sea $R_i = \sum_{j \neq i} |a_{ij}|$. Pruebe que todo autovalor λ de A satisface $|\lambda - a_{i,i}| \leq R_i$ para algún i .

Ejercicio 16 Sea A una matriz estrictamente diagonal dominante por filas. Llamando $\alpha = \min_k (|a_{kk}| - \sum_{j \neq k} |a_{kj}|) > 0$, muestre que $\|A^{-1}\|_\infty < 1/\alpha$



Peter Gustav Lejeune Dirichlet
Düren 1805 - Göttingen 1859



John von Neumann
Budapest 1903 - Washington 1957