Análisis Numérico

Segundo Cuatrimestre 2019

TP N° 2 - Tema 2: Convección-difusión.

1 El problema:

Considerar el problema de convección-difusión:

$$\begin{aligned} u_t(x,t) &= \alpha\Delta_x u(x,t) - \mathbf{v}(x)\cdot\nabla_x u(x,t) \qquad x\in\Omega,\ t\in[0,T] \\ u(x,0) &= g(x) \end{aligned} \tag{1}$$

La incógnita u puede interpretarse como la concentración de una cierta sustancia quimíca en un medio. El término $\alpha\Delta_x u$ describe la difusidad: un punto de alta densidad, tenderá a difundir concentración hacia su entorno. α es un coeficiente positivo que modela la difusividad de la sustancia en el medio. El término de transporte $\mathbf{v}\cdot\nabla u$ modela el movimiento del medio, que traslada la sustancia. $\mathbf{v}:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ es el campo de velocidades. La condición de Neumann implica que no hay flujo hacia el exterior, es decir: que la cantidad total de sustancia se mantiene constante. Consideraremos $\Omega = B(0,1)$

2 Formulación Discreta

Dada una triangulacion $\mathcal{T}_h$ de Ω, considerar el espacio V_h de funciones continuas y lineales en cada triángulo. Llamemos $\{\phi_i\}_i$ a la base nodal de V_h. La discretización de la formulación débil del problema conduce a la necesidad de calcular la matriz de masa M, de rigidez R y la matriz correspondiente al término convectivo C, dadas por:

$$M_{i,j} = \int_\Omega \phi_i\phi_j \qquad R_{i,j} = \int_\Omega \nabla\phi_i\nabla\phi_j \qquad C_{i,j} = \int_\Omega (\mathbf{v}\cdot\nabla\phi_j)\phi_i$$

Con esta notación el problema discreto es:

$$(M + dt(\alpha R + C))U^{n+1} = MU^n$$

donde dt es el paso temporal y U^n es el vector de coeficientesde u_h a tiempo n.

Es conveniente hacer un programa auxiliar que, dados los datos de la triangulación, calcule las matrices M, R y C.

3 Datos

Estudiaremos, para $\mathbf{v}$:

- $\mathbf{v} = v(x, y) = (-y, x)/\|(x, y)\|$.

Con esta configuración, el problema puede pensarse como la disolución de azúcar en una taza, al revolver. Para el dato inicial pueden probarse distintas opciones. Por ejemplo, $g = \chi_{B((0,\frac{1}{2}),\frac{1}{4})}$

3.1 Comandos útiles:

Pueden resultar útiles las siguientes funciones:

- `Delaunay`, de la biblioteca `scipy.spatial` para la construcción de la triangulación. Alternativamente, puede usarse `Triangulation` de `matplotlib.tri`, que también servirá para dibujar.

- `csr_matrix` de la biblioteca `scipy.sparse` para el ensamblado de matrices

- `spsolve` o `cg` de `scipy.sparse.linalg` para la resolución de sistemas.

- `tripcolor`, de `matplotlib.pyplot` en conjunción con `Triangulation` de `matplotlib.tri` para graficar. `tripcolor` hace un grafico 2D sobre una malla triangular, en donde la magnitud de la función graficada se traduce en color.