Topología

Segundo Cuatrimestre 2018

Práctica 8

Teorema de Van-Kampen.

1. Calcular el grupo fundamental de los siguientes espacios y dar generadores.

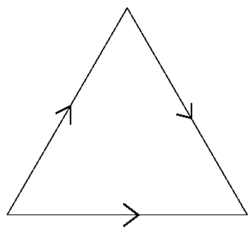
   a) $X = K$ la botella de Klein.

   b) $X = K - \{pt\}$, la botella de Klein sin un punto.

   c) $X = M$ la banda de Mobius.

   d) $X = M - \{pt\}$, la banda de Mobius sin un punto.

   e) $X = D$, el Dunce Hat, que se define como el cociente de un triángulo relleno del cual identificamos sus lados como indica la figura:



   f) $X = D - \{pt\}$, el Dunce Hat sin un punto.

   g) $X = \mathbb{S}^1 \times [0,1]/\sim$ donde $(x,0) \sim (x',1)$ para todo $x, x' \in X$.

   h) $X = \mathbb{P}^n(\mathbb{R})$.

2. Para cada $n \in \mathbb{N}$ sea C_n la circunferencia en $\mathbb{R}^2$ con centro $(n,0)$ y radio n. Sea $X = \bigcup_n C_n \subseteq \mathbb{R}^2$ y sea $x_0 = (0,0) \in X$. Pruebe que $\pi_1(X, x_0)$ es el grupo libre $*_n \pi_1(C_n)$, el mismo que el grupo fundamental del wedge infinito $\bigvee_n \mathbb{S}^1$. Muestre que X y $\bigvee_n \mathbb{S}^1$ son homotópicamente equivalentes pero no homeomorfos.

3. Para cada $n \in \mathbb{N}$ sea C_n la circunferencia en $\mathbb{R}^2$ con centro $(1/n, 0)$ y radio $1/n$. Sea $X = \bigcup_n C_n \subseteq \mathbb{R}^2$ y sea $x_0 = (0,0) \in X$. Pruebe que $\pi_1(X, x_0)$ es un grupo no numerable.

Homología.

1. Sea $\{X_i\}_i$ una familia de espacios topológicos y sea $x_i \in X_i$ tal que (X_i, x_i) es un par bueno (es decir, x_i es retracto por deformación de entornos $U_i \ni x_i$ en X_i). Si $X = \bigvee_i X_i$ es la unión de los espacios identificando todos los puntos bases x_i, pruebe que $\tilde{H}_n(X) = \bigoplus_i \tilde{H}_n(X_i)$.

2. Calcule $\tilde{H}_n\left(\bigvee_{i \in I} \mathbb{S}^k\right)$.

3. Calcule la homología de las esferas, del plano proyectivo y de la botella de Klein.

4. Calcule los grupos de homología de $\mathbb{R}^n \setminus \{x_1, \ldots, x_n\}$.

5. Calcule la homología del cociente de $\mathbb{S}^2$ que se obtiene de identificar el polo norte y el polo sur en un punto.

6. Sea $X = \mathbb{S}^2/\sim$ con $x \sim -x$ si $x = (x_1, \ldots, x_n, 0)$ (es decir, si $x \in \mathbb{S}^1$, con $\mathbb{S}^1 \subseteq \mathbb{S}^2$ la inclusión en el ecuador). Calcular sus grupos de homología.

7. Sea X espacio topológico. Muestre que $\tilde{H}_n(X) \simeq \tilde{H}_{n+1}(SX)$ para todo $n \geq 0$, donde SX es la suspensión de X.

8. Sea X un espacio topológico tal que $X = \bigcup_{i=1}^n U_i$ con U_i abiertos tales que toda intersección es vacía o tiene homología reducida trivial. Pruebe que $\tilde{H}_i(X) = 0$ para todo $i \geq n-1$, y muestre con un ejemplo que la desigualdad es óptima.

9. Sea X espacio topológico y sea $x_0 \in X$. Pruebe que $H_n(X, x_0) \simeq \tilde{H}_n(x)$ para todo n.

10. Sea $A \subseteq X$. Probar que $H_0(X, A) = 0$ si y solo si A interseca a todas las componentes arcoconexas de X.

11. Probar que si $A \subseteq X$ es retracto por deformación débil entonces $H_n(X, A) = 0$ para todo $n \geq 0$.

12. Sea $A \subseteq X$ retracto. Pruebe que $H_n(X) = H_n(A) \oplus H_n(X, A)$.

13. Si X es contráctil y $A \subseteq X$ entonces $H_n(X, A) \simeq \tilde{H}_{n-1}(A)$.

14. Sea $A \subseteq X$ y sea CA el cono de A. Sea $X \cup CA$ el espacio que identifica los puntos de $a \in A \subseteq X$ con la base del cono. Pruebe que $H_n(X, A) \simeq \tilde{H}_n(X \cup CA)$.

15. Pruebe que $\mathbb{S}^n$ no es un retracto de $\mathbb{S}^{n+1}$ y que toda función continua $f : \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$ tiene algún punto fijo.

16. Sea $X \subseteq \mathbb{R}^n$ abierto. Pruebe que toda función continua e inyectiva $f : X \to \mathbb{R}^n$ es abierta.