Topología

Segundo Cuatrimestre 2018

Práctica 7

Homotopía de funciones continuas.

1) Sean X, Y espacios topológicos, con X localmente cuasi-compacto. Sea $H : X \times I \to Y$ una homotopía. Entonces $\hat{H} : I \to \mathcal{C}(X, Y)$ es una función continua si en $\mathcal{C}(X, Y)$ consideramos la topología compacto abierta. En particular si $X = I$, las homotopías de caminos son curvas continuas de caminos.

2) Si X es un espacio topológico definimos $\pi_0(X) = [*, X]$, donde $*$ es el conjunto con un sólo elemento. Probar que $\pi_0(X)$ es el conjunto de componentes arco-conexas de X.

3) Sea X un espacio topológico y $x_0 \in X$. Sea $\Omega X = \{\alpha : I \to X\ ,\ \alpha(0) = \alpha(1) = x_0\}$ con la topología del subespacio de la topología compacto abierta. Probar que $\pi_1(X, x_0) = \pi_0(\Omega X)$ (igualdad de conjuntos).

4) Sea $X \subseteq \mathbb{R}^n$ un convexo. Mostrar que dos caminos con los mismos extremos son homotópicos (como caminos).

5) a) Sea $I = [0, 1]$. Mostrar que para cualquier X, el conjunto $[X, I]$ consta de un único elemento.

   b) Mostrar que si Y es arco-conexo, el conjunto $[I, Y]$ consta de un único elemento.

6) Sean X, Y espacios topológicos y $f : X \to Y$ una función continua. Decimos que f es *nulhomotópica* si f es homotópica a una función constante. Un espacio X se dice *contráctil* si la función identidad $i_X : X \to X$ es nulhomotópica.

   a) Mostrar que I y $\mathbb{R}$ son contráctiles.

   b) Mostrar que un espacio contráctil es arco-conexo.

   c) Mostrar que si Y es contráctil, entonces para todo X el conjunto $[X, Y]$ tiene un único elemento.

   d) Mostrar que si X es contráctil, entonces $[X, Y] = \pi_0(Y)$. Deducir que si X es contráctil e Y es arco-conexo, el conjunto $[X, Y]$ tiene un único elemento.

7) Sea X el peine

$$X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / 0 \leq y \leq 1, x = 0 \text{ ó } x = 1/n\ n \in \mathbb{N}\} \cup \{(x, y)/y = 0,\ 0 \leq x \leq 1\} \subset \mathbb{R}^2$$

   Probar que X es contráctil.

   Sugerencia: Primero contraer el peine al eje x. Luego contraer el eje x al origen.

8) Sea X un espacio topológico y sean $x, y \in X$.

   a) Sean α, β caminos de x a y. Probar que si α es homotópico a β, entonces $\tilde{\alpha} = \tilde{\beta}$.

b) Sean α y β caminos de x a y. Probar que $\tilde{\alpha}$ difiere de $\tilde{\beta}$ en un automorfismo interior de $\pi_1(X, y)$, es decir, existe $[\gamma] \in \pi_1(X, y)$ tal que $\tilde{\alpha}([f]) = [\gamma]^{-1}\tilde{\beta}([f])[\gamma]$.

c) Probar que $\pi_1(X, x)$ es abeliano si y sólo si para todo par de caminos α, β de x a y, $\tilde{\alpha} = \tilde{\beta}$.

9) Sean X, Y espacios topológicos arco-conexos.

a) Sean $f : I \to X$, $g : I \to Y$ caminos cerrados con punto base $x_0 \in X$, $y_0 \in Y$ respectivamente. Sean $i : X \to X \times Y$ y $j : Y \to X \times Y$ las inclusiones definidas por $i(x) = (x, y_0)$, $j(y) = (x_0, y)$. Demostrar que los caminos $(i \circ f) * (j \circ g)$ y $(j \circ g) * (i \circ f)$ son homotópicos.

Sugerencia: Observar que $(i \circ f) * (j \circ g) = (f * c_{x_0}, c_{y_0} * g)$.

b) Probar que la aplicación $\rho : \pi_1(X, x_0) \times \pi_1(Y, y_0) \to \pi_1(X \times Y, (x_0, y_0))$ definida por $\rho([f], [g]) = [(i \circ f) * (j \circ g)]$ es un isomorfismo de grupos.

c) Un espacio topológico se llama un *H-espacio* (H de Heinz Hopf) si existe una aplicación continua $\mu : X \times X \to X$ y un punto $x_0 \in X$ tales que $\mu \circ i \simeq_{x_0} id$ y $\mu \circ j \simeq_{x_0} id$, donde $\simeq_{x_0}$ quiere decir que la homotopía H es relativa a x_0. Observar que $\mu(x_0, x_0) = x_0$. Probar que $\pi_1(X, x_0)$ es abeliano.

Sugerencia: Probar que $\mu((i \circ f) * (j \circ g)) \simeq f * g$ y usar a).

10) Probar que un grupo topológico G es un H-espacio con μ la multiplicación y x_0 la identidad del grupo. Deducir que $\pi_1(G, x_0)$ es abeliano.

11) a) Sea Y el cono sobre S^1 (es decir, el cociente $(S^1 \times I)/A$ donde $A = S^1 \times \{1\}$). Probar que existe un homeomorfismo $\varphi : Y \to D^2$ tal que $\varphi(S^1 \times \{0\}) = S^1 \subset D^2$ y $\varphi|_{S^1 \times \{0\}}$ es la identidad.

b) Sea X un espacio topológico y $f : S^1 \to X$ una función continua. Probar que f es nulhomótopica si y sólo si existe una función continua $g : D^2 \to X$ tal que $g|_{S^1} = f$.

c) Sea $X = S^1$ y sea $f : X \to Y$ nulhomotópica. Probar que $f_* : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Y, f(x_0))$ es el morfismo nulo.

(Sugerencia: usar el item anterior para factorizar f_* por $\pi_1(D^2, x)$.)

d) *Teorema*. Sean X, Y espacios topológicos, $f : X \to Y$ nulhomotópica. Probar que $f_* : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Y, f(x_0))$ es el morfismo nulo.

I) Sea $\phi : I \to S^1$, $\alpha(t) = (e^{2\pi i t})$ y sea $\alpha : I \to X$ un lazo basado en x_0. Probar que la función $k : S^1 \to X$, $k(a) = \alpha(\phi^{-1}(a))$ es continua.

II) Probar que $f \circ k$ es nulhomotópica, y por lo tanto $(f \circ k)_*$ es el morfismo nulo.

III) Verificar que $(f \circ k)_*[\phi] = f_*([\alpha])$ y deducir que f_* es el morfismo nulo.

e) Deducir que si X es contráctil, entonces el grupo fundamental de X es el grupo trivial.

12) Sea $f : S^1 \to S^1$, $f(z) = z^n$ (z es un número complejo y $n \in \mathbb{Z}$). Calcular $f_* : \pi_1(S^1, b_0) \to (S^1, b_0)$, donde $b_0 = 1 + 0i$.

(Sugerencia: Alcanza con calcular $f_*[\phi]$, donde $\phi(s) = e^{2\pi i s}$.)

13) Sea $X = \mathbb{C} \setminus \{0\}$, y sea $x_0 \in X$. Sea α un lazo en X basado en x_0.

a) Sea $p : \mathbb{R} \to S^1$, $p(x) = e^{2\pi i x}$. Sea β el lazo $\beta(s) = \alpha(s)/||\alpha(s)||$. Sea $\overline{\beta}$ un levantado de β, esto es, $\overline{\beta}$ es un camino en $\mathbb{R}$ tal que $p \circ \overline{\beta} = \beta$. Entonces $\overline{\beta}(1) = \overline{\beta}(0) + n$, para algún $n \in \mathbb{N}$. Probar que la clase de homotopía de α determina n de manera única y recíprocamente, que n determina la clase de homotopía de α. El entero n se llama el número de vueltas de α alrededor del origen.

b) **Teorema.** Sea α un lazo diferenciable a trozos en X. Entonces el número de vueltas de α alrededor del origen es la integral

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\alpha \frac{dz}{z}.$$

(Sugerencia: Si $z = \beta(s)$ es un camino diferenciable a trozos en X, considerar el camino $s \mapsto \beta(s)/||\beta(s)||$ en S^1 y sea θ un levantado de este camino. Entonces $\beta(s) = ||\beta(s)||e^{2\pi i\theta(s)}$. Calcular $\int_\beta \frac{dz}{z}$.)

c) Sea $b_0 = 1 + 0i$. Existen isomorfismos

$$\pi_1(X, x_0) \to \pi_1(X, b_0) \to \pi_1(S^1, b_0) \to \mathbb{Z}$$

y que el número de vueltas de α es la imagen de $[\alpha]$ por estos isomorfismos.

14) Para cada uno de los siguientes espacios el grupo fundamental es o bien trivial, o bien $\mathbb{Z}$ o bien $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ o bien el grupo fundamental del espacio $S^1 \vee S^1$. Determinar cuál es la que vale.

a) $X = S^1 \times [0, 1]$ (un cilindro).

b) $X = S^1 \times \mathbb{R}$ (un cilindro infinito).

c) $X = T$, el toro usual (recordar T es isomorfo a $S^1 \times S^1$), (dibujar los generadores).

d) $X = S^1 \times D^2$, esto es, un toro relleno, (dibujar los generadores).

e) $X = \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$.

f) $X = \mathbb{R}^3 \setminus L$, donde L es una recta.

g) $X = \mathbb{R}^3 \setminus K$, donde K es la unión de los tres semiejes no negativos.

h) $T \setminus \{y\}$, el toro sin un punto.

i) $\mathbb{P}^2(\mathbb{R}) \setminus \{y\}$, el plano proyectivo real sin un punto.

j) $S^1 \cup (\mathbb{R}_{\geq 0} \times \{0\})$.

k) $S^1 \cup (\mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathbb{R})$.

l) $S^1 \cup (\mathbb{R} \times 0)$.

m) $\mathbb{R}^2 - (\mathbb{R}_{\geq 0} \times \{0\})$.

15) Sea $h : (S^1, 1) \to (Y, y_0)$. Probar que si h_* es el morfismo cero, entonces h es homotópica a una constante.

(Sugerencia: Sea $\phi : I \to S^1$, el lazo definido por $\phi(t) = e^{2\pi it}$; sea $f = h \circ \phi$. Probar que hay una homotopía F entre f y el lazo constante y_0, y que F induce una función $H : S^1 \times I \to Y$ tal que $H \circ (\varphi \times i_I) = F$.)

16) Se dice que una función $h : S^n \to S^m$ *preserva antípodas* si $h(-x) = -h(x)$ para cada $x \in S^n$.

Teorema. Si $h : S^1 \to S^1$ preserva antípodas y es continua, entonces h no es nulhomotópica.

a) Sea $p : S^1 \to S^1$ definida por $p(z) = z^2$, donde pensamos a z como un número complejo de módulo 1. Mostrar que p induce una función continua $g : S^1 \to S^1$ tal que $p \circ h = g \circ p$ (recordar que $p : S^1 \to S^1$ es cociente).

b) Probar que si α es un camino en S^1 que une x con su antípoda $-x$, entonces $p \circ \alpha$ es un lazo en S^1 que no es homotópico a una constante.

c) Probar que tanto p_* como g_* son monomorfismos.

d) Deducir que h no es nulhomotópica.

17) a) **Teorema (Borsuk-Ulam).** No existe niguna función continua $f : S^2 \to S^1$ que preserve antípodas.
(Sugerencia: Considerar el ecuador en S^2).

b) **Teorema.** Dada una función continua $f : S^2 \to \mathbb{R}^2$, existe un punto $x \in S^2$ tal que $f(x) = f(-x)$.

c) **Teorema meteorológico.** En cada instante existen dos puntos antipodales en la superficie de la tierra con la misma temperatura y presión atmosférica.

d) **Teorema.** Si $g : S^2 \to S^2$ es continua y $g(x) \neq g(-x)$ para todo x, entonces g es suryectiva.

18) Sea A un subespacio de X; $j : A \to X$ la inclusión, y sea $f : X \to A$ una función continua. Supongamos que la función $j \circ f : X \to X$ es homotópica a la identidad $id_X : X \to X$ mediante una homotopía $H : X \times I \to X$.

a) Mostrar que si $H(a, t) \in A$ para todo $a \in A$, entonces j_* y f_* son isomorfismos.

b) Si f es una retracción, entonces j_* y f_* son isomorfismos.

c) Mostrar que no siempre j_* y f_* son isomorfismos.

19) Sea $X \subseteq \mathbb{R}^n$ el complemento de una variedad lineal de codimensión mayor o igual a 2. Determinar el grupo fundamental de X.

20) Sea $n \geq 3$ y sea $A \subseteq \mathbb{R}^n$ un conjunto finito. Probar que $\mathbb{R}^n \setminus A$ es simplemente conexo.

21) Sea X el cociente obtenido a partir de S^2 identificando sus polos. Determinar el grupo fundamental de X.

22) Determinar el grupo fundamental de S^n.

23) Probar que $\pi_1(X \vee Y, p) \simeq \pi_1(X, p) * \pi_1(Y, p)$ si p posee un entorno simplemente conexo en X y en Y. Vale lo mismo si p no posee tales entornos?

24) Si $C \subseteq \mathbb{R}^3$ es una circunferencia, entonces $\pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus C, x_0) \simeq \mathbb{Z}$. Sugerencia: $\mathbb{R}^3 \setminus C$ se deforma a un espacio homeomorfo a $S^1 \vee S^2$.