Topología

Segundo Cuatrimestre 2018

Práctica 6

Espacios de funciones.

Denotamos por $\mathcal{C}(X,Y)$ al conjunto de funciones continuas de X a Y. En este conjunto definimos dos topologías:

- La topología compacto-abierta τ_{ca} cuya subbase son los conjuntos de la forma $S(K,U) = \{f : X \to Y : f(K) \subseteq U\}$, donde $K \subseteq X$ es cuasi-compacto y $U \subseteq Y$ es abierto.

- La topología de convergencia puntual τ_{cp} que es la topología subespacio de la topología producto $\mathcal{C}(X,Y) \subseteq Y^X = \prod_{x\in X} Y$.

1. Dotamos a $\mathcal{C}(X,Y)$ de la topología compacto-abierta τ_{ca}. Para cada $y \in Y$, sea $\phi_y : X \to Y$ la función constantemente y, y sea $\phi : Y \to \mathcal{C}(X,Y)$ definida por $\phi(y) = \phi_y$. Entonces ϕ es un homeomorfismo con su imagen y, si Y es Hausdorff, tiene imagen cerrada.

2. a) Pruebe que Y es T_0, T_1, T_2 si y solo si $(\mathcal{C}(X,Y), \tau_{ca})$ es T_0, T_1, T_2 respectivamente.
   b) Pruebe que Y es regular si y solo si $(\mathcal{C}(X,Y), \tau_{ca})$ es regular. (Si $\overline{U} \subseteq V$ entonces $\overline{S(K,U)} \subseteq S(K,V)$).
   c) Si Y es normal entonces no necesariamente $(\mathcal{C}(X,Y), \tau_{ca})$ lo es.

3. Sean X e Y espacios topológicos y $A \subseteq X$ subespacio. Probar que la función restricción $r_A : \mathcal{C}(X,Y) \to \mathcal{C}(A,Y)$ definida por $r(f) = f|_A$ es continua con la topología compacto-abierta.

4. Sean X, Y, Z espacios topológicos. Dotamos a $\mathcal{C}(X,Y)$, $\mathcal{C}(Y,Z)$ y $\mathcal{C}(X,Z)$ de la topología compacto-abierta. Si Y es localmente compacto y Hausdorff, entonces la composición $\circ : \mathcal{C}(Y,Z) \times \mathcal{C}(X,Y) \to \mathcal{C}(X,Z)$ definida por $\circ(f,g) = f \circ g$ es continua. (Sugerencia: si $f \circ g \in S(K,U)$, encontrar V tal que $g(K) \subseteq V$ y $f(\overline{V}) \subseteq U$).

5. Si $p : E \to B$ es cociente y X es localmente compacto y Hausdorff, entonces $p \times id : E \times X \to B \times X$ es cociente.

6. Sea X un espacio topológico e (Y,d) un espacio métrico. Sobre $\mathcal{C}(X,Y)$ se definen las siguientes topologías:

   - τ_f la *topología fina*, cuya base es $\{B(f,\delta) : f \in \mathcal{C}(X,Y), \delta : X \to \mathbb{R}_{>0}$ continua $\}$, donde $B(f,\delta) = \{g \in \mathcal{C}(X,Y) : d(f(x), g(x)) < \delta(x) \forall x \in X\}$.
   - τ_{cu} la *topología de la convergencia uniforme*, cuya base es $\{B^\rho(f,\epsilon) : f \in \mathcal{C}(X,Y), \epsilon > 0\}$, donde ρ es la distancia definida por $\rho(f,g) = \sup\{\overline{d}(f(x), g(x)) : x \in X\}$.
   - τ_c la *topología de la convergencia compacta*, cuya base es $\{B_K(f,\epsilon) : f \in \mathcal{C}(X,Y), \epsilon > 0, K \subseteq X$ cuasi-compacto$\}$, donde $B_K(f,\epsilon) = \{g \in \mathcal{C}(X,Y) : d(f(x), g(x)) < \epsilon \forall x \in K\}$.

Pruebe que

a) $\tau_f \supseteq \tau_{cu} \supseteq \tau_c \supseteq \tau_{cp}$.

b) Si X es cuasi-compacto, entonces $\tau_{cu} = \tau_c = \tau_f$.

c) Si X es discreto, entonces $\tau_c = \tau_{cp}$.

d) Si X es discreto, entonces $Y^X = \mathcal{C}(X, Y)$ y la topología caja coincide con la fina.

e) $(f_n)_n$ converge a f con τ_c si y solo si para todo $K \subseteq X$ cuasi-compacto, $f_n|_K$ converge a $f|_K$ con la topología de convergencia uniforme.

f) La topología de convergencia compacta y la compacto-abierta coinciden.

7. Sea $f_n : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}$ la sucesión de funciones definida por $f_n(x) = \frac{1}{nx}$. Decida con cuáles de las topologías del ejercicio anterior $(f_n)_n$ tiene límite.

8. Sea $f_n : (-1, 1) \to \mathbb{R}$ la sucesión de fnciones definida por $f_n(x) = \sum_{k=1}^{n} kx^k$. Pruebe que $(f_n)_n$ converge con la topología de convergencia compacta (y concluya que la función límite es continua), pero que no converge con la topología uniforme.

9. Pruebe que el conjunto de funciones acotadas $\{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : f \text{ acotada}\}$ no es cerrado en $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ con la topología de convergencia compacta pero sí lo es con la topología uniforme.