

Topología

SEGUNDO CUATRIMESTRE 2018

PRÁCTICA 5

- 1) Sean X un espacio topológico e $Y \subset X$ un subespacio. Sean $A, B \subset Y$ tales que $Y = A \cup B$. Probar que A, B es una separación de Y si y sólo si $\overline{A} \cap B = A \cap \overline{B} = \emptyset$ (las clausuras en X).
- 2) Un espacio topológico es conexo si y solo si todo subconjunto propio y no vacío posee frontera no vacía.
- 3) Sean $\mathcal{T}, \mathcal{T}'$ dos topologías en X . Si $\mathcal{T}' \supset \mathcal{T}$, ¿qué puede implicar la conexión de X en una de las topologías respecto de la conexión en la otra?
- 4) Si $A \subseteq X$ es conexo y $A \subseteq B \subseteq \overline{A}$, entonces B es conexo. Qué ocurre con ∂A y A° ?
- 5) Probar que $\prod_{i \in I} X_i$ es conexo si y sólo si cada X_i es conexo.
- 6) Decidir cuáles de los siguientes espacios dotados de la topología del orden lexicográfico son conexos.
 - a) $\mathbb{N} \times [0, 1)$.
 - b) $[0, 1) \times \mathbb{N}$.
 - c) $[0, 1) \times [0, 1]$.
 - d) $[0, 1] \times [0, 1)$.
- 7) a) Sea $f : S^1 \rightarrow \mathbb{R}$ continua. Pruebe que existe un punto $x \in S^1$ tal que $f(x) = f(-x)$.
b) Sea $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ continua. Pruebe que existe un punto fijo de f .
- 8) Probar que son equivalentes:
 - a) X es localmente conexo.
 - b) Las componentes conexas de todo subespacio abierto de X son abiertas en X .
 - c) Los abiertos conexos de X forman una base de la topología de X .Concluya que si X es localmente conexo, entonces las componentes conexas de X son abiertas.
- 9) a) Si $A \subset \mathbb{R}^2$ es finito entonces $\mathbb{R}^2 - A$ es arco-conexo.
b) Si $B \subset S^2$ es finito entonces $S^2 - B$ es arco-conexo.
- 10) a) Sea $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de subespacios conexos de X tales que $A_n \cap A_{n+1} \neq \emptyset$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Demostrar que $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$ es conexo.

- b) Sean $\{A_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ una colección de subespacios conexos de X y A un subespacio conexo de X . Demostrar que si $A \cap A_\alpha \neq \emptyset$ para todo $\alpha \in \Lambda$, entonces $A \cup \bigcup_{\alpha \in \Lambda} A_\alpha$ es conexo.
- 11) a) ¿Es el producto de espacios arco-conexos arco-conexo?
- b) Si $A \subset X$ y A es arco-conexo, ¿Es $\overline{A}$ arco-conexo? (considerar el seno del topólogo $\{(t, \sin(t)) : 0 < t \leq 1\} \subseteq \mathbb{R}^2$).
- c) Si $f : X \rightarrow Y$ es continua y X es arco-conexo, ¿Es $f(X)$ arco-conexo?
- d) Si $\{A_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ es una colección de subconjuntos arco-conexos de X y $\bigcap_{\alpha \in \Lambda} A_\alpha \neq \emptyset$, ¿Es $\bigcup_{\alpha \in \Lambda} A_\alpha$ arco-conexo?
- 12) Mostrar que $\mathbb{R}^n$ y $\mathbb{R}$ no son homeomorfos si $n > 1$.
- 13) Calcular las componentes conexas y arco-conexas de $\mathbb{R}_l$.
- 14) Sea X localmente arco-conexo. Mostrar que todo abierto de X es localmente arco-conexo. Deducir que los abiertos conexos de X son arco-conexos.
- 15) Probar que si X es normal y conexo entonces X tiene un punto o es no numerable.
- 16) Relacionar la conexión y arco-conexión de un espacio X con su compactificación de Alexandroff y de Stone-Čech (asumir las hipótesis necesarias sobre X).