Topología

Segundo Cuatrimestre 2018

Práctica 4

Compacidad.

1) Sea X un espacio topológico. Probar que son equivalentes:

   a) X es cuasi-compacto.

   b) Para todo espacio topológico Y y para todo abierto $W \subset X \times Y$ que verifica $X \times \{y_0\} \subset W$ para $y_0 \in Y$, existe $V \subset Y$ tal que $y_0 \in V$ y $X \times V \subset W$.

   c) Para todo espacio topológico Y, la proyección $\pi_2 : X \times Y \to Y$ es cerrada.

2) *a*) Sean $\mathcal{T}$ y $\mathcal{T}'$ dos topologías en X. Supongamos que $\mathcal{T}' \supset \mathcal{T}$. ¿La (cuasi-)compacidad de alguna de estas topologías implica la (cuasi-)compacidad de la otra?

   b) Si X es compacto tanto para $\mathcal{T}$ como para $\mathcal{T}'$ entonces $\mathcal{T} = \mathcal{T}'$ o no son comparables.

3) *a*) Probar que en $\mathbb{R}$ con la topología del complemento finito todo subconjunto es cuasi-compacto, pero los únicos cerrados son los conjuntos finitos. Por lo tanto hay conjunto cuasi-compactos que no son cerrados.

   b) ¿Es $[0, 1]$ cuasi-compacto como subespacio de $\mathbb{R}$ en la topología

$$\mathcal{T}_c = \{U : \mathbb{R} \setminus A \text{ es numerable o todo } \mathbb{R}\}?$$

   ¿Lo es como subespacio de $\mathbb{R}_l$?

4) S_Ω es secuencialmente compacto pero no es compacto.

5) Mostrar que si $f : X \to Y$ es continua, donde X es cuasi-compacto e Y es Hausdorff, entonces f es cerrada.

6) *Teorema.* Sea $f : X \to Y$, con Y compacto. Entonces f es continua si y sólo si el gráfico de f,

$$G_f = \{(x, f(x)) : x \in X\},$$

es cerrado en $X \times Y$.

(Sugerencia: Si G_f es cerrado y V es un entorno abierto de $f(x_0)$, encontrar un tubo que contenga a $\{x_0\} \times (Y \setminus V)$ que no corte a G_f.)

7) Mostrar que $\mathbb{Q}$ no es localmente compacto.

8) Pruebe que $[0, 1]^\omega$ no es localmente compacto con a topología uniforme.

9) Mostrar que si $\prod_{\alpha \in \Lambda} X_\alpha$ es localmente compacto, entonces cada X_α es localmente compacto y todos los X_α, salvo una cantidad finita, son cuasi-compactos.

10) Sea X un espacio localmente compacto. Si $f : X \to Y$ es continua, ¿Es $f(X)$ localmente compacto? ¿Y si f es además abierta?

11) Si X es localmente compacto y Hausdorff entonces es completamente regular.

Compactificación de Alexandroff. Si X es un espacio topológico definimos la *compactificación de Alexandroff* como el conjunto $X^* = X \cup \{\infty\}$ donde la topología es la unión de la topología en X y los conjuntos $U \subset X^*$ tales que $X^* \setminus U$ es cuasi-compacto y cerrado en X.

12) *Teorema (Alexandroff).* La compactificación de Alexandroff X^* de un espacio topológico X es un espacio cuasi-compacto y X es un subespacio de X^*.

El espacio X^* es compacto si y sólo si X es Hausdorff y localmente compacto.

Además X es cuasi-compacto si y sólo si ∞ es un punto aislado de X^* (i.e., abierto y cerrado), y por lo tanto X es denso en X^* si y sólo si X no es cuasi-compacto.

13) Sea $\mathbb{N}$ con la topología discreta. Probar que su compactificación de Alexandroff es homeomorfa a $\{0\} \cup \{1/n : n \in \mathbb{N}\}$ con la topología que hereda como subespacio de $\mathbb{R}$.

14) Probar que la compactificación de Alexandroff de $\mathbb{R}^n$ es homeomorfa a S^n. (Considerar la proyección estereográfica $p : S^n \setminus \{(0, 0, \ldots, 0, 1)\} \to \mathbb{R}^n$, $p(x_1, \ldots, x_{n+1}) = \frac{1}{1-x_{n+1}}(x_1, \ldots, x_n)$.)

15) Pruebe que si X e Y son homeomorfos entonces sus compactificaciones de Alexandroff X^* e Y^* son homeomorfas.

Compactificación de Stone-Čech. Una compactificación de Stone-Čech de un espacio topológico X es un par (Y, i) con $i : X \to Y$ continua que cumple:

- Y es compacto.
- $i(X) \subset Y$ es denso.
- Si $f : X \to Z$ es continua y Z es compacto, existe una única función continua $g : Y \to Z$ de modo que $g \circ i = f$.

16) Si (Y, i) e (Y', i') son compactificaciones de Stone-Čech de X, entonces existe un único homeomorfismo $h : Y \to Y'$ con $i' = h \circ i$. De este modo hablaremos de *la* compactificación de Stone-Čech.

17) Sean $H = \{h : X \to [0, 1] \text{ continuas}\}$ y $Z = [0, 1]^H$ con la función $i : X \to Y$ definida por $i(x)_h = h(x)$ para cada $h \in H$. Sea $Y = \overline{i(X)} \subseteq Z$. Probar que $i : X \to Y$ es la compactificación de Stone-Čech de X. Denotamos $Y = \beta(X)$.

18) Sea Y una compactificación T_2 de X, y sea $\beta(X)$ la compactificación de Stone-Čech. Pruebe que existe una función cerrada y suryectiva $g : \beta(X) \to Y$ que se restringe a la identidad de X.

19) a) Pruebe que si $f : S_\Omega \to \mathbb{R}$ es continua, entonces es eventualmente constante.

b) Pruebe que la compactificación en un punto de S_Ω y la compactificación de Stone-Čech son equivalentes.

c) Concluya que toda compactificación de S_Ω es equivalante a la compactificación en un punto.

Variedades topológicas. Un espacio topológico X se dice una variedad topológica de dimensión n si es un espacio Hausdorff en el cada punto tiene un entorno homeomorfo a $\mathbb{R}^n$.

20) Probar que S^n y $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ son variedades de dimensión n y que $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ es una variedad de dimensión $2n$.

21) Probar que el toro y la botella de Klein son variedades de dimensión 2 (se llaman superficies).

22) Sea $X = \mathbb{R} \times \mathbb{R}/_\sim$ donde $(x, 0) \sim (y, 1)$ si y sólo si $x = y \neq 0$ (X es una la recta con el origen doble).

Probar que todo punto de X tiene un entorno homeomorfo a $\mathbb{R}$ pero X no es Hausdorff y por lo tanto no es una variedad.

23) (*) Sea X un G-espacio. Decimos que G actúa *libremente* en X si se verifica que $g \cdot x \neq x$ si $g \neq 1$.

Decimos que la acción es *propiamente discontinua* si se verifica que para todo $x \in X$ existe un abierto U tal que $x \in X$ y tal que $g \cdot U \cap U = \emptyset$ para todo $g \neq 1$.

Probar:

a) Sea X un G-espacio Hausdorff, donde G un grupo finito que actúa libremente en G. Probar que la acción es propiamente discontinua.

b) Sea X es un G-espacio Hausdorff, donde G es un grupo finito. Probar que el espacio cociente X/G es Hausdorff.

c) Deducir que si un grupo finito actúa libremente en una variedad (compacta) de dimensión n, entonces el espacio cociente X/G es también una variedad (compacta) de dimensión n.

d) Volver a probar que el espacio proyectivo real $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ es una variedad de dimensión n.