# Topología

Segundo Cuatrimestre 2018

Práctica 3

**Separación.**

1) Probar que productos y subespacios de espacios $T_2$ son $T_2$.

2) Probar que $X$ es $T_2$ si y sólo si la diagonal $\Delta = \{(x,x) : \ x \in X\}$ es cerrada en $X \times X$.

3) Sea $X = \mathbb{R}$ con la topología que tiene como base

$$\{(a,b) : \ a < b \in \mathbb{R}\} \cup \{(a,b) \setminus K : \ a < b \in \mathbb{R}\}$$

donde $K = \{1/n : \ n \in \mathbb{N}\}$. Probar que $X$ es $T_2$ pero no es $T_3$.

(Sugerencia: no se puede separar el 0 de $K$.)

4) Sean $X$ un espacio topológico, $\sim$ una relación de equivalencia en $X$ y $p : X \to X/_\sim$ la proyección al cociente. Sea $R = \{(x,y) \in X \times X : \ x \sim y\}$. Probar que:

   a) Si $X/_\sim$ es Hausdorff, entonces $R$ es cerrado en $X \times X$.

   b) Si $p\colon X \to X/_\sim$ es abierta y $R$ es cerrado en $X \times X$, entonces $X/_\sim$ es Hausdorff .

   c) Si $p \times p : X \times X \to X/_\sim \times X/_\sim$ dada por $p \times p \ (x_1, x_2) = (p(x_1), p(x_2))$ es final, y $R$ es cerrado en $X \times X$, entonces $X/_\sim$ es Hausdorff.

5) Mostrar que si $X$ es regular, entonces todo par de puntos de $X$ tienen entornos cuyas clausuras son disjuntas.

6) Mostrar que si $X$ es normal, todo par de cerrados disjuntos tienen entornos cuyas clausuras son disjuntas.

7) Mostrar que si $X$ es un conjunto ordenado, entonces es $T_3$ con la topología del orden.

8) Mostrar que si $X$ es un conjunto bien ordenado, entonces es $T_4$ con la topología del orden. Por lo tanto $S_\Omega$ y $\overline{S}_\Omega$ son espacios $T_4$. Recordemos que $\overline{S}_\Omega$ es un conjunto bien ordenado con máximo $\Omega$ y tal que toda sección propia $S_\alpha = \{x \in \overline{S}_\Omega : x < \alpha\}$ es numerable, con $\alpha \in \overline{S}_\Omega - \{\Omega\}$, y $S_\Omega = \{x : x < \Omega\}$ es no numerable. Además, todo subconjunto numerable de $S_\Omega$ tiene una cota superior en $S_\Omega$.

9) Mostrar que un subespacio cerrado de un espacio normal es normal.

10) Mostrar que si $\prod X_\alpha$ es $T_i$ $(0 \leq i \leq 4)$, entonces cada $X_\alpha$ lo es.

11) Sea $X$ un conjunto con dos topologías $\mathcal{T}, \mathcal{T}'$. Supongamos que $\mathcal{T} \supset \mathcal{T}'$. Si $X$ es $T_i$ $(0 \leq i \leq 4)$ con alguna de las topologías, ¿qué se puede decir sobre la otra?

12) Sean $f, g : X \to Y$ funciones continuas. Supongamos que $Y$ es Hausdorff. Mostrar que $\{x \in X : \ f(x) = g(x)\}$ es cerrado en $X$.

13) Sea $Z$ un espacio topológico. Si $Y$ es un subespacio de $Z$, decimos que $Y$ es retracto de $Z$ si existe una función continua $r : Z \to Y$ tal que $r(y) = y$ para todo $y \in Y$.

*a*) Pruebe que si $Z$ es Hausdorff e $Y$ es un retracto de $Z$, entonces $Y$ es cerrado en $Z$.

*b*) Sea $A \subseteq \mathbb{R}^2$ con dos elementos. Pruebe que $A$ no es un retracto de $\mathbb{R}^2$.

*c*) Pruebe que $\mathbb{S}^1$ es un retracto de $\mathbb{R}^2 - \{0\}$.

14) Sea $X$ un espacio regular. Definimos una relación de equivalencia en $X$ por $x \sim y$ si y sólo si $\overline{\{x\}} = \overline{\{y\}}$. Probar que la proyección $p : X \to X/_\sim$ es tanto abierta como cerrada, y que $X/_\sim$ es un espacio $T_3$.

(Sugerencia: Si $A$ es abierto o cerrado en $X$ y $x \in A$ entonces $\overline{\{x\}} \subset A$.)

15) Sea $p : X \to Y$ un cociente. Probar que si $p$ es cerrada y $X$ es normal, entonces $Y$ es normal.

16) Probar que los espacios métricos son normales, mostrando que dados dos cerrados $A, B$ disjuntos, existe una función continua $\varphi : X \to [0,1]$ tal que $\varphi(A) = \{0\}$ y $\varphi(B) = \{1\}$.

(Sugerencia: recordar que si $x \in X$ y $C \subset X$, la función (continua) $d_C(x) = \inf\{d(x,c) : c \in C\}$ verifica $d_C(x) = 0$ si y sólo si $x \in \overline{C}$. Usar entonces $d_A$ y $d_B$ para armar la función $\varphi$.)

17) Muestre que $\mathbb{R}_l \times \mathbb{R}_l$ no es $T_4$ y concluya que un producto de espacios $T_4$ no necesariamente es $T_4$. *Sugerencia:* Utilice el lema de Jones.

**Definición:** Un espacio topológico $X$ se dice *completamente regular* si dados un cerrado $F$ y un punto $x$ tal que $x \notin F$, existe una función continua $\varphi : X \to [0,1]$ tal que $\varphi(x) = 0$ y $\varphi(F) = \{1\}$.

Observar que no se pide que los puntos sean cerrados.

El Lema de Urysohn muestra que los espacios normales son completamente regulares.

18) Mostrar que un subespacio de un espacio completamente regular es completamente regular y que el producto de espacios completamente regulares es completamente regular.

19) Mostrar que $\mathbb{R}_l^2$ es completamente regular, a pesar de no ser $T_4$.

20) Muestre que cualquier grupo topológico $T_0$ es $T_2$.

21) Sea $H$ la intersección de todos los entornos del cero de un grupo topológico abeliano $G$. Pruebe que:

a) $H$ es un subgrupo.

b) $H$ es la clausura de $\{0\}$.

c) $G/H$ es $T_2$.

d) $G$ es $T_2$ sii $H = \{0\}$.

Cuáles de las afirmaciones anteriores son ciertas si $G$ no es necesariamente abeliano?