Topología

Segundo Cuatrimestre 2005

Práctica 2

Redes

Sea Λ un conjunto no vacío. Decimos que Λ es dirigido si existe una relación $\geq$ en Λ que verifica:

i) $\alpha \geq \alpha \quad \forall \alpha \in \Lambda$

ii) Si $\alpha \geq \beta$ y $\beta \geq \gamma \Rightarrow \alpha \geq \gamma$

iii) Dados $\alpha, \beta \in \Lambda$, existe $\gamma \in \Lambda$ tal que $\gamma \geq \alpha$ y $\gamma \geq \beta$

Un subconjunto $\Gamma \subset \Lambda$ se dice *cofinal* si para todo $\lambda \in \Lambda$, $\exists \gamma \in \Gamma$ tal que $\gamma \geq \lambda$. Se verifica fácilmente que Γ está dirigido por $\geq$.

Sea X un espacio topológico. Una *red en* X es una función $f : (\Lambda, \geq) \to X$ donde el par $(\Lambda, \geq)$ denota a un conjunto dirigido. Si $\alpha \in \Lambda$ notaremos $f(\alpha) = x_\alpha$, y a la red $f : (\Lambda, \geq) \to X$ como $(x_\alpha)_{\alpha \in \Lambda}$.

Se dice que una red $(x_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$ *converge a* x si para todo U abierto tal que $x \in U$ existe $\alpha_0 \in \Lambda$ tal que $x_\beta \in U$ si $\beta \geq \alpha_0$. Si $(x_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$ converge a x, escribimos $x_\alpha \to x$.

Dada $f : (\Lambda, \geq) \to X$ una red, $(\Gamma, \succeq)$ otro conjunto dirigido y $g : \Gamma \to \Lambda$ una función, decimos que $f \circ g : (\Gamma, \succeq) \to X$ es una *subred de* $(x_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$ si g verifica: $\forall\ \alpha \in \Lambda$, $\exists \gamma_0 \in \Gamma$ tal que $g(\gamma) \geq \alpha\ \ \forall\ \gamma \succeq \gamma_0$. A la subred la notaremos $(x_{\alpha_\gamma})_{\gamma\in\Gamma}$.

1) Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico. Probar que las redes convergentes verifican las las siguientes propiedades:

R1: Si $(x_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$ es eventualmente constante, entonces $(x_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$ converge a la constante.

R2: Si $(x_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$ converge a x, entonces toda sub-red de $(x_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$ converge a x.

R3: Si $(x_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$ verifica que toda sub-red tiene una sub-sub-red que converge a x, entonces $(x_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$ converge a x.

R4: Sean Λ un conjunto dirigido, y para cada $\alpha \in \Lambda$ sea Γ_α un conjunto dirigido. Supongamos que para cada $\alpha \in \Lambda$ se tiene una red $(x^\alpha_k)_{k\in\Gamma_\alpha}$, que converge a $x^\alpha \in X$, y además $(x^\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$ converge a $x \in X$. Consideremos $\Phi = \Lambda \times \prod_{\alpha\in\Lambda} \Gamma_\alpha$ ordenado por el orden producto, esto es,

$$(\alpha, (k_\beta)_{\beta\in\Lambda}) \geq (\alpha', (k'_\beta)_{\beta\in\Lambda}) \iff \alpha \geq \alpha' \text{ y } k_\beta \geq k'_\beta\ \forall \beta \in \Lambda.$$

Entonces la red $(\alpha, (k_\beta)_{\beta\in\Lambda}) \mapsto x^\alpha_{k_\alpha}$ converge a x.

2) Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico. Probar que la fórmula

$$\overline{A} = \{x \in X :\ \exists (x_\alpha)_{\alpha\in\Lambda} \subseteq A,\ \text{y } x_\alpha \to x\}$$

define un operador de clausura. Probar que esta clausura es la misma que la usual.

3) Si $(x_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$ es una red, decimos que $x \in X$ es un *punto de acumulación* de la red si para todo $A \in \mathscr{F}_x$, el conjunto $\{\alpha \in \Lambda : x_\alpha \in A\}$ es cofinal en Λ. Probar que x es un punto de acumulación de la red si y sólo si existe una subred de $(x_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$ que converge a x (para la ida, considerar Γ el conjunto de pares (α, U) con $\alpha \in \Lambda$, U entorno abierto de x que contiene a x_α, con el orden $(\alpha, U) \preceq (\beta, V)$ si $\alpha \leq \beta$ y $V \subseteq U$).

Funciones Continuas.

4) Sean X, Y espacios topológicos. Probar que cada una de las siguientes condiciones sobre $f : X \to Y$ es equivalente a pedir que f sea continua

   a) Para todo $x \in X$, y para todo $A \in \mathscr{F}_y$, $y = f(x)$, existe $B \in \mathscr{F}_x$ tal que $f(B) \subseteq A$.

   b) Para toda red $(x_\alpha)_{\alpha\in\Lambda} \subset X$ tal que $x_\alpha \to x$, se tiene que $f(x_\alpha) \to f(x)$.

   c) Para todo $A \subseteq X$, $f\left(\overline{A}\right) \subseteq \overline{f(A)}$.

   d) Si $\mathcal{B}$ es una base para la topología de Y, $f^{-1}(B)$ es abierto en X para todo $B \in \mathcal{B}$.

   e) Si $\mathcal{S}$ es una sub-base para la topología de Y, $f^{-1}(S)$ es abierto en X para todo $S \in \mathcal{S}$.

5) *Lema de pegado.* Sea $\{A_\alpha\}_{\alpha\in\mathcal{A}}$ una colección de subconjuntos del espacio topológico X tal que $X = \bigcup_{\alpha\in\mathcal{A}} A_\alpha$. Sea $f : X \to Y$ y supongamos que $f|_{A_\alpha}$ es continua para cada $\alpha \in \mathcal{A}$.

   a) Probar que si cada A_α es abierto, entonces f es continua.

   b) Probar que si $\mathcal{A}$ es finito y cada conjunto A_α es cerrado, entonces f es continua.

   c) Encontrar un ejemplo donde $\mathcal{A} = \mathbb{N}$, cada A_α es cerrado, pero f no es continua.

   d) Una familia $\{A_\alpha\}_{\alpha\in\mathcal{A}}$ se dice localmente finita si para cada $x \in X$ existe un abierto $U \subseteq X$, $x \in U$, tal que $U \cap A_\alpha \neq \emptyset$ sólo para finitos valores de α. Mostrar que si la familia $\{A_\alpha\}_{\alpha\in\mathcal{A}}$ es localmente finita y cada A_α es cerrado, entonces f es continua.

6) Sean X, Y, Z espacios topológicos, y sea $f : X \times Y \to Z$ una función. f se dice **continua en** x si $f(-, y) : X \to Z$ es continua para todo $y \in Y$. Análogamente, f se dice **continua en** y si $f(x, -) : Y \to Z$ es continua para todo $x \in X$.

   a) Pruebe que si f es continua, entonces es continua en cada variable.

   b) Dé un ejemplo en el que f sea continua en cada variable y sin embargo no sea continua.

7) Sean X un espacio topológico y $E \subset X$. Sea $\chi_E : X \to \mathbb{R}$ la función característica de E, esto es,

$$\chi_E(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x \in E \\ 0 & \text{si} \quad x \notin E \end{cases}$$

Probar que χ_E es continua en x si y sólo si x no pertenece a la frontera de E.

8) a) Sean X, Y conjuntos totalmente ordenados, con la topología del orden. Si $f : X \to Y$ es biyectiva y preserva el orden, entonces f es un homeomorfismo.

   b) Sea $n \in \mathbb{N}$. Sea $g : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$, $g(x) = \sqrt[n]{x}$. Probar que g es un homeomorfismo.

   c) Sea $X = (-\infty, -1) \cup [0, +\infty)$ con la topología euclídea. Definimos $f : X \to \mathbb{R}$ por:

$$f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{si} \quad x < -1 \\ x & \text{si} \quad x \geq 0 \end{cases}$$

   Probar que f es biyectiva y preserva el orden. ¿Es f un homeomorfismo?

9) Sea Y un conjunto totalmente ordenado con la topología del orden. Sean $f, g : X \to Y$ funciones continuas.

   a) Probar que el conjunto $\{x \in X : \ f(x) \leq g(x)\}$ es cerrado en X.

   b) Sea $h : X \to Y$ la función

$$h(x) = \text{mín}\{f(x), g(x)\}.$$

   Probar que h es continua.
   (Sugerencia: probar que h es continua en dos cerrados apropiados.)

Topologías dadas por una métrica

10) a) Sean $x_0 \in X$ e $y_0 \in Y$. Probar que las funciones $f : X \to X \times Y$ y $g : Y \to X \times Y$ definidas por $f(x) = (x, y_0)$, $g(y) = (x_0, y)$ son subespacio (o inmersiones). Esto es, definen un homeomorfismo con su imagen.

   b) Sea X un espacio con una distancia $d : X \times X \to \mathbb{R}$. Probar que la topología inducida por la métrica es la mínima tal que d es continua.
   (Sugerencia: si d es continua, también lo es $d_{x_0} : X \to \mathbb{R}$, $d_{x_0}(x) = d(x, x_0)$.)

11) Mostrar que $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ con la topología del orden del diccionario es metrizable (i.e. existe una métrica tal que la topología que induce la métrica coincide con la dada).

12) Sea $\mathbb{R}^\omega$ el conjunto de las sucesiones de números reales. Se define en $\mathbb{R}^\omega$ la topología uniforme de la siguiente manera:

   Primero se define en $\mathbb{R}$ la métrica acotada $\overline{d}(a, b) = \text{mín}\{|a - b|, 1\}$ (notar que induce la misma topología que la usual). Luego se define en $\mathbb{R}^\omega$ la métrica uniforme como $d((a_n)_{n \in \mathbb{N}}, (b_n)_{n \in \mathbb{N}}) = \sup_{n \in \mathbb{N}}\{\overline{d}(a_n, b_n)\}$.

   a) Verificar que la métrica uniforme es efectivamente una métrica.

   b) Decidir si las siguientes funciones de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}^\omega$ son continuas tomando en $\mathbb{R}$ la toplogía usual, y en $\mathbb{R}^\omega$ la topología uniforme.

$$\begin{aligned} f(t) &= (t, 2t, 3t, \ldots), \\ g(t) &= (t, t, t, \ldots), \\ h(t) &= (t, \tfrac{1}{2}t, \tfrac{1}{3}t, \ldots). \end{aligned}$$

c) Decidir si las siguientes sucesiones convergen en $\mathbb{R}^\omega$ con la topología uniforme.

$$\begin{array}{ll} w_1 = (1,1,1,1,\ldots), & x_1 = (1,1,1,1,\ldots) \\ w_2 = (0,2,2,2,\ldots), & x_2 = \left(0,\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2},\ldots\right) \\ w_3 = (0,0,3,3,\ldots), & x_3 = \left(0,0,\frac{1}{3},\frac{1}{3},\ldots\right) \\ \ldots & \ldots \\ y_1 = (1,0,0,0,\ldots), & z_1 = (1,1,0,0,\ldots) \\ y_2 = (\frac{1}{2},\frac{1}{2},0,0,\ldots), & z_1 = (\frac{1}{2},\frac{1}{2},0,0,\ldots) \\ y_3 = (\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3},0,\ldots), & z_3 = (\frac{1}{3},\frac{1}{3},0,0,\ldots), \\ \ldots & \ldots \end{array}$$

d) Calcular la clausura del conjunto de las sucesiones eventualmente cero con respecto a la topología uniforme de $\mathbb{R}^\omega$.

13) Sea $\overline{\rho}$ la distancia uniforme sobre $\mathbb{R}^\omega$. Dado $x = (x_1, x_2, \ldots) \in \mathbb{R}^\omega$ y dado $0 < \epsilon < 1$, sea

$$U(x,\epsilon) = (x_1 - \epsilon, x_1 + \epsilon) \times \cdots \times (x_n - \epsilon, x_n + \epsilon) \ldots$$

a) Pruebe que $U(x,\epsilon)$ no es igual a la bola $B_{\overline{\rho}}(x,\epsilon)$.

b) Pruebe que $U(x,\epsilon)$ ni siquiera es abierto en la topología uniforme.

c) Pruebe que

$$B_{\overline{\rho}}(x,\epsilon) = \cup_{\delta<\epsilon} U(x,\delta).$$

14) Sean $(a_1, a_2, \ldots), (b_1, b_2, \ldots) \in \mathbb{R}^\omega$ dos sucesiones tales que $a_i \neq 0$ para todo i. Definamos $h : \mathbb{R}^\omega \to \mathbb{R}^\omega$ por la fórmula

$$h((x_1, x_2, \ldots)) = (a_1 x_1 + b_1, a_2 x_2 + b_2, \ldots),$$

Dar condiciones sobre los números a_i, b_i para que h sea continua. ¿Y para que h sea un homeomorfismo?

15) Sean (X_n, d_n) espacios métricos. Pruebe que $\prod_{n\in\mathbb{N}} X_n$ con la topología producto es metrizable.

Topología Producto vs. Topología Caja

16) Sea $\{X_i\}_{i\in I}$ una familia de espacios topológicos, y sea para cada $i \in I$ un subconjunto $A_i \subseteq X_i$. Decidir cuáles de las siguientes afirmaciones son ciertas y cuáles falsas si se toma en $X = \prod_{i\in I} X_i$ la topología producto. ¿Y si se toma la topología caja?

a) Si cada A_i es cerrado en X_i entonces $\prod_{i\in I} A_i$ es cerrado en X.

b) $\overline{\prod_{i\in I} A_i} = \prod_{i\in I} \overline{A_i}$.

17) Sea $(x_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$ una red de puntos en el espacio topológico $X = \prod_{i\in I} X_i$ (considerado con la topología producto). Probar que la sucesión $(x_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$ converge a x si y sólo si la red $\pi_i(x_\alpha)$ converge a $\pi_i(x)$ en X_i para todo $i \in I$. ¿Es cierto esto si se toma en X la topología caja?

18) a) Comparar las topologías caja, producto y uniforme en $\mathbb{R}^\omega$.

b) Hacer de nuevo los items (b), (c), (d) del ejercicio 12 de esta práctica, tomando en $\mathbb{R}^\omega$ la topología caja y la producto. Comparar con lo obtenido para la topología uniforme.

19) Considerar la función h definida en el ejercicio 14. Probar que con sólo pedir que todos los a_i sean no nulos entonces h es un homeomorfismo si se considera en $\mathbb{R}^\omega$ la topología producto. ¿Y si en $\mathbb{R}^\omega$ consideramos la topología caja?

Topologías iniciales y finales – Cocientes y Subespacios

20) Sea k un cuerpo. Dotamos a k de la topología cofinita. Pruebe que $\{p : k^n \to k\}_{p\in k[x_1,\dots,x_n]}$ es una familia inicial para la topología Zariski en k^n.

21) Sea $\{X_i\}_{i\in I}$ una familia de espacios topológicos. Sean $Z = \prod_{i\in I} X_i$, $W = \coprod_{i\in I} X_i$, y para cada $i \in I$, $\pi_i : Z \to X_i$ la proyección i-ésima, y $\lambda_i : X_i \to W$ la inclusión.

a) Probar que π_i es abierta para todo $i \in I$.

b) Probar que λ_i es abierta y cerrada.

22) Sea $\left\{X \xrightarrow{f_i} X_i\right\}_{i\in I}$ una familia inicial de funciones (o sea, X tiene la topología inicial inducida por las funciones f_i), y $f : X \to \prod X_i$ la función definida por

$$f(x) = (f_i(x))_{i\in I}.$$

Sea Z la imagen de f. Probar que $f : X \to Z$ es abierta.

23) Consideremos el espacio de Sierpinski, $S = \{0, 1\}$, $\mathcal{T}(S) = \{\emptyset, \{1\}, S\}$. Sea X un espacio topológico.

a) Probar que $A \subseteq X$ es abierto si y sólo si la función característica de A, $\chi_A : X \to S$, es continua.

b) Probar que la familia $\{\chi_U\}_{U\in\mathcal{T}_X}$ es una familia inicial para la topología de X.

24) Probar que si $f : X \to Y$ es final e inyectiva, entonces es subespacio (i.e. f es inicial e inyectiva).

25) Si $f : X \to Y$ es inicial y suryectiva, entonces es cociente (i.e. f es final y suryectiva).

26) a) Sea $f : X \to Y$ una función continua. Probar que si existe $g : Y \to X$ continua tal que $f \circ g = id_Y$, entonces f es un cociente.

b) Si $A \subseteq X$, una *retracción de* X sobre A es una función continua $r : X \to A$ tal que $r(a) = a$ para todo $a \in A$. Concluir que toda retracción es un cociente.

27) Sea $\pi_1 : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la proyección a la primer coordenada.

a) Sea X el subespacio $(\{0\} \times \mathbb{R}) \cup (\mathbb{R} \times \{0\})$ de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, y sea $g = \pi_1|_X$. Mostrar que g es un cociente cerrado pero no abierto.

b) Sea Y el subespacio $(\mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathbb{R}) \cup (\mathbb{R} \times \{0\})$ de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, y sea $h = \pi_1|_Y$. Mostrar que h no es abierta ni cerrada pero es cociente.

28) Caracterizar el espacio cociente $\mathbb{R}^2/\sim$ en cada uno de los siguientes casos

a) $(x_0, y_0) \sim (x_1, y_1) \Leftrightarrow x_0 + y_0^2 = x_1 + y_1^2$.

b) $(x_0, y_0) \sim (x_1, y_1) \Leftrightarrow x_0^2 + y_0^2 = x_1^2 + y_1^2$.

29) Sea Z el subespacio $\mathbb{R} \times \{0\} \cup \{0\} \times \mathbb{R}$ de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Definimos $g : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to Z$ por la fórmula

$$\begin{cases} g((x,y)) &= (x,0) \text{ si } x \neq 0 \\ g((0,y)) &= (0,y) \end{cases}$$

a) ¿Es g un cociente? ¿Es g continua?

b) Halle una base para la topología cociente en Z inducida por g.

Acciones de un grupo en un espacio topológico.

Sea X un espacio topológico y G un grupo. Decimos que X es un G-espacio si G actúa en X por homeomorfismos, esto es, G actúa en X, y para cada $g \in G$ la función $\theta_g : X \to X$ definida por $\theta_g(x) = g \cdot x$ es continua (y dado que $(\theta_g)^{-1} = \theta_{g^{-1}}$, tenemos que θ_g es homeomorfismo).

30) Probar que los siguientes espacios topológicos son G-espacios.

a) $X = \mathbb{R}$, $G = \mathbb{Z}$, y la acción es $n \cdot x = n + x$, para $n \in \mathbb{Z}$, $x \in \mathbb{R}$.

b) $X = \mathbb{R}^2$, $G = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, y la acción es $(n, m) \cdot (x, y) = (n + x, m + y)$.

c) $X = S^n$, $G = \mathbb{Z}_2 = \{\pm 1\}$, y la acción es $\pm 1 \cdot x = \pm x$.

d) $X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -1/2 \leq y \leq 1/2\}$, $G = \mathbb{Z}$, y la acción es $m \cdot (x, y) = (m + x, (-1)^m y)$.

31) Si X es un G-espacio, podemos definir en X una relación de equivalencia por

$$x \sim y \iff \exists\, g \in X \text{ tal que } y = g \cdot x.$$

El espacio de cociente resultante lo notamos con X/G, y consideramos en él la topología cociente.

a) Probar que la proyección al cociente $p : X \to X/G$ es abierta.

b) Probar que si G es finito, p es cerrada.

c) Probar que el espacio cociente $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ (ejercicio 30a) es homeomorfo a S^1.

d) Probar que el espacio cociente $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ (ejercicio 30b) es homeomorfo al toro $S^1\times S^1$.

e) El espacio cociente $S^n/\mathbb{Z}_2$ (ejercicio 30c) se nota $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$, y se llama el espacio proyectivo real de dimensión n. Pruebe que para $n=2$, este espacio es homeomorfo al cociente de $[0,1]\times[0,1]$ por la relación que identifica $(0,y)$ con $(1,1-y)$ para todo $y\in[0,1]$, y $(x,0)$ con $(1-x,1)$ para todo $x\in[0,1]$.

f) El espacio cociente $X/\mathbb{Z}$ (ejercicio 30d) es homeomorfo a la banda de Möbius. (Recordar que la banda de Möbius se define como el cociente de $[0,1]\times[0,1]$ por la relación que identifica $(0,y)$ con $(1,1-y)$, $y\in[0,1]$.)

Grupos topológicos

Un grupo $(G,\cdot)$ dotado de una topología τ tal que $\cdot: G\times G\to G$ y $^{-1}: G\to G$ son funciones continuas se dice un *grupo topológico*.

32) Pruebe que $(\mathbb{R}^n,+)$, $(\mathbb{C}^n,+)$ y $(S^1,.)$ son grupos topológicos.

33) Sea $k=\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$. Verifique que los siguientes grupos de matrices, vistos con la topología subespacio respecto de $k^{n\times n}$, son grupos topológicos:

a) El grupo general lineal $\mathrm{GL}_n(k)=\{A\in k^{n\times n}:\det(A)\neq 0\}$.

b) El grupo especial lineal $\mathrm{SL}_n(k)=\{A\in \mathrm{GL}_n(k):\det(A)=1\}$.

c) El grupo ortogonal $\mathrm{O}(n)=\{A\in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}):AA^t=1\}$.

d) El grupo unitario $\mathrm{U}(n)=\{A\in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}):AA^*=1\}$.

e) El grupo ortogonal especial $\mathrm{SO}(n)=\mathrm{O}(n)\cap\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$.

f) El grupo unitario especial $\mathrm{SU}(n)=\mathrm{U}(n)\cap\mathrm{SL}_n(\mathbb{C})$.

34) Muestre que $\mathrm{SO}(2)$ es homeomorfo a S^1 y que $\mathrm{SU}(2)$ es homeomorfo a S^3.

35) ¿Es $(\mathbb{Z},+)$ con la topología cofinita un grupo topológico?

36) Sea G un grupo topológico.

a) La inversión, las multiplicaciones a izquierda y a derecha y las conjugaciones son todos homeomorfismos de G.

b) Para todo par de puntos $x,y\in G$ hay un homeomorfismo $f: G\to G$ tal que $f(x)=y$.

c) La función $\alpha: G\times G\to G$ definida por $\alpha(g,h)=gh^{-1}$ es continua.

d) Sea e el neutro de G y sea U un abierto que contiene a e. Probar que existe un abierto V que contiene a e tal que $V.V\subseteq U$ y $V^{-1}=V$.

e) Si $H\leq G$ es un subgrupo, entonces $\overline{H}$ es un subgrupo de G. Si además H es normal en G, entonces $\overline{H}$ también lo es.