Topología

Segundo Cuatrimestre 2018

Práctica 1

Bases y sub-bases de topologías

1) Sea $\{\mathcal{T}_\alpha\}_{\alpha\in A}$ una colección de topologías en X.

   a) Probar que $\bigcap_{\alpha\in A}\mathcal{T}_\alpha$ es una topología en X. ¿Es $\bigcup_{\alpha\in A}\mathcal{T}_\alpha$ una topología en X?

   b) Probar que existe una única topología en X que es la menor de todas las topologías que contienen a todas las topologías $\mathcal{T}_\alpha$ ($\alpha\in A$), y una única topología en X que es la mayor de todas las topologías contenidas en cada una de las topologías $\mathcal{T}_\alpha$ ($\alpha\in A$).

   c) Si $X=\{a,b,c\}$,$\mathcal{T}_1=\{\emptyset,X,\{a\},\{a,b\}\}$ y $\mathcal{T}_2=\{\emptyset,X,\{a\},\{b,c\}\}$, encontrar las topologías mencionadas en (b).

2) Probar que si $\mathcal{B}$ es base de una topología en X, entonces la topología generada por $\mathcal{B}$ es igual a la intersección de todas las topologías que contienen a $\mathcal{B}$. Probar que vale lo mismo si $\mathcal{B}$ es una sub-base.

3) Sea $(X,<)$ un conjunto totalmente ordenado. Sea $\mathcal{S}_1=\{(-\infty,x):\ x\in X\}$ y sea $\mathcal{S}_2=\{(x,\infty):\ x\in X\}$, donde $(-\infty,x)=\{y\in X:\ y<x\}$ y $(x,+\infty)=\{y\in X: x<y\}$. Probar que $\mathcal{S}_1\cup\mathcal{S}_2$ es una sub-base para la topología del orden en X.

4) Considerar las siguientes colecciones de subconjuntos de $\mathbb{R}$:

$\mathcal{B}_1=\{(a,b):\ a<b\}$,

$\mathcal{B}_2=\{[a,b):\ a<b\}$,

$\mathcal{B}_3=\{(a,b]:\ a<b\}$,

$\mathcal{B}_4=\mathcal{B}_1\cup\{B\setminus K:\ B\in\mathcal{B}_1\}$, donde $K=\{1/n:\ n\in\mathbb{N}\}$,

$\mathcal{B}_5=\{(a,+\infty):\ a\in\mathbb{R}\}$.

$\mathcal{B}_6=\{(-\infty,a):\ a\in\mathbb{R}\}$.

$\mathcal{B}_7=\{B:\ \mathbb{R}\setminus B \text{ es finito}\}$.

   a) Probar que cada $\mathcal{B}_i$ es una base para una topología en $\mathbb{R}$.

      Notación: Notaremos $\mathbb{R}_l$ al espacio topológico $\mathbb{R}$ con la topología definida por $\mathcal{B}_2$.

   b) Comparar las siete topologías entre si.

   c) Probar que $\mathcal{B}_5\cup\mathcal{B}_6$ es una sub-base que genera la misma topología que $\mathcal{B}_1$.

5) **Topología definida por filtro de entornos.** Supongamos que tenemos para cada $x \in X$ un subconjunto (no vacío) $\mathscr{F}_x \subset \mathscr{P}(X)$ con las siguientes propiedades:

E1: Dado $A \in \mathscr{F}_x$, entonces $x \in A$.

E2: Dado $B \subset A$, $B \in \mathscr{F}_x$, entonces $A \in \mathscr{F}_x$.

E3: Dados A, $B \in \mathscr{F}_x$, entonces $A \cap B \in \mathscr{F}_x$.

E4: Dado $A \in \mathscr{F}_x$, existe $B \subset A$ tal que $B \in \mathscr{F}_x$, y $B \in \mathscr{F}_y$ para cada $y \in B$.

Probar:

a) $\mathcal{T} = \{B \in \mathscr{P}(X) : B \in \mathscr{F}_x \ \forall x \in B\} \cup \emptyset$ es una topología en X (observar que no se necesita la propiedad $E4$). Esta topología se llama la topología definida por los filtros de entornos de sus puntos.

b) Si $(X, \mathcal{T})$ es un espacio topológico, los conjuntos

$$\mathscr{F}_x = \{A \in \mathscr{P}(X) : x \in U \subset A \text{ para algún } U \in \mathcal{T}\}$$

verifican los axiomas E1-E4. Los conjuntos $\mathscr{F}_x$ se llaman filtros de entornos del punto x.

c) El filtro de entornos de una topología definida por filtro de entornos coincide con éste.

d) Si $(X, \mathcal{T})$ es un espacio topológico, la topología definida por los filtros de entornos de X coincide con $\mathcal{T}$.

6) **Topologías definidas por operador de clausura.**

Un operador $\overline{(\cdot)} : \mathscr{P}(X) \to \mathscr{P}(X)$ que verifica las siguientes propiedades:

C1: $\overline{\emptyset} = \emptyset$,

C2: $A \subseteq \overline{A}$, $\forall A \in \mathscr{P}(X)$,

C3: $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$, $\forall A \in \mathscr{P}(X)$,

C4: $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$, $\forall A, B \in \mathscr{P}(X)$,

se llama un operador de clausura.

a) Probar que si se tiene un operador de clausura, se tiene en X una topología definida por

$$U \in \mathcal{T} \Leftrightarrow \overline{X \setminus U} = X \setminus U.$$

Observación: Lo que estamos haciendo es definir la topología por sus cerrados, esto es,

$$F \text{ es cerrado} \iff \overline{F} = F.$$

b) Probar que si $(X, \mathcal{T})$ es un espacio topológico, la fórmula

$$\overline{A} = \bigcap_{F \supseteq A} F \qquad \text{donde } F \text{ es cerrado}$$

define un operador de clausura.

c) Probar que si se parte de un operador clausura en un espacio X y se construye una topología como en a), el operador clausura definido a partir de esta topología (como en b)) es el original.

d) Probar que si se parte de un espacio topológico X y se define un operador clausura como en b), la topología definida a partir de este operador (como en a)) es la original de X.

7) Probar que si $(X, \mathcal{T})$ es un espacio topológico, la fórmula

$$\overline{A} = \{x \in X : \ U \cap A \neq \emptyset \ \ \forall\, U \in \mathcal{T}, \ x \in U\}$$

define un operador de clausura. Probar que este operador de clausura coincide con el definido en la parte (b) del ejercicio anterior, (en otras palabras, probar que para todo $A \subset X$,

$$\{x \in X : \ U \cap A \neq \emptyset \ \ \forall\, U \in \mathcal{T}, \ x \in U\} = \bigcap_{F \supseteq A} F \qquad \text{(donde } F \text{ es cerrado))}$$

8) Probar que $\bigcup_\alpha \overline{A_\alpha} \subseteq \overline{\bigcup_\alpha A_\alpha}$ y mostrar que la inclusión puede ser estricta.

9) Decidir cuáles de las siguientes igualdades son ciertas, y en caso de ser falsas determinar si se verifica alguna de las inclusiones.

a) $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cap \overline{B}$.

b) $\overline{\bigcap_\alpha A_\alpha} = \bigcap_\alpha \overline{A_\alpha}$.

c) $\overline{A \setminus B} = \overline{A} \setminus \overline{B}$.

d) $\bigcup_\alpha A_\alpha^\circ = (\bigcup_\alpha A_\alpha)^\circ$.

e) $\bigcap_\alpha A_\alpha^\circ = (\bigcap_\alpha A_\alpha)^\circ$.

10) Sea X un espacio topológico y sea $A \subseteq X$. Pruebe que:

a) $\partial A = \overline{A} \cap \overline{X \setminus A} = \overline{A} \setminus A^\circ$.

b) $X \setminus \partial A = A^\circ \cup (X \setminus A)^\circ$.

c) $\overline{A} = A \cup \partial A$.

d) $A^\circ = A \setminus \partial A$.

e) A es abierto sii $A \cap \partial A = \emptyset$.

f) A es cerrado sii $\partial A \subseteq A$.

11) Considerar el conjunto $X = [0,1] \times [0,1]$ con la topología del orden del diccionario. Determinar la clausura de los siguientes subconjuntos de X.

$A = \{(1/n, 0) : n \in \mathbb{N}\}$,

$B = \{(1 - 1/n, 1/2) : n \in \mathbb{N}\}$,

$C = \{(x, 0) : 0 < x < 1\}$,

$D = \{(x, 1/2) : 0 < x < 1\}$,

$E = \{(1/2, y) : 0 < y < 1\}$.

12) Considerar las siete topologías definidas en el ejercicio 4. Determinar la clausura del conjunto $K = \{1/n : n \in \mathbb{N}\}$ en cada una de las topologías.

13) Sea X un conjunto y considere

$$\tau = \{A \subseteq X : A = \emptyset \text{ o bien } |X \setminus A| < \infty\}.$$

Muestre que τ define una topología sobre X, a la que llamamos la *topología cofinita*. ¿Qué pasa si X es finito?

14) Describa el interior, la clausura y la frontera de los subconjuntos de un conjunto X dotado de la topología cofinita.

15) Muestre que todo cerrado de $\mathbb{R}^n$ es la frontera de un subconjunto. ¿Es cierto esto para cualquier espacio topológico? ¿Puede dar una condición necesaria para que esto ocurra?

Topología subespacio en $Z \subseteq X$ y topología producto en $X \times Y$.

Si $(X, \mathcal{T}_X)$ es un espacio topológico y $Z \subseteq X$ es un subconjunto de X, se define la topología subespacio en Z como

$$\mathcal{T}_Z = \{U \cap Z : U \in \mathcal{T}_X\}.$$

$(Z, \mathcal{T}_Z)$ se llama un subespacio de X.

Si $(Y, \mathcal{T}_Y)$ es otro espacio topológico, se define la topología producto en el producto cartesiano $X \times Y$ como la topología que tiene como base de abiertos a los conjuntos de la forma $U \times V$ donde $U \in \mathcal{T}_X$ y $V \in \mathcal{T}_Y$.

16) Probar que si Y es un subespacio de X, y A es un subconjunto de Y, entonces la topología de A como subespacio de Y coincide con la topología de A como subespacio de X.

17) Sea $(X, <)$ un conjunto totalmente ordenado, visto como espacio topológico con la topología del orden y sea $Y \subset X$ un subconjunto. En Y podemos considerar dos topologías: la del subespacio y la del orden (ya que es un conjunto ordenado). Compararlas.

18) Una función $f : X \to Y$ se dice abierta si $f(U)$ es abierto en Y para todo U abierto en X. Probar que $\pi_1 : X \times Y \to X$ y $\pi_2 : X \times Y \to Y$ son abiertas.

19) Probar que la topología del orden del diccionario en $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ coincide con la topología producto de $\mathbb{R}_d \times \mathbb{R}$ donde $\mathbb{R}_d$ es la topología discreta en $\mathbb{R}$. Comparar con la topología usual de $\mathbb{R}^2$.

20) Sea $\mathbb{R}_l$ definido por la base $\mathcal{B}_2$ del ejercicio 4. Sea L una recta en el plano. Describir la topología que hereda L como subespacio de $\mathbb{R}_l \times \mathbb{R}$ y como subespacio de $\mathbb{R}_l \times \mathbb{R}_l$.

21) Sea I el subespacio $[0, 1]$ de $\mathbb{R}$. Comparar la topología producto en $I \times I$ con la topología del orden del diccionario en $I \times I$ y con la topología $I_d \times I$ donde I_d denota a I con la topología discreta.

22) Sean $A \subseteq X$ y $B \subseteq Y$. Probar que $\overline{A \times B} = \overline{A} \times \overline{B}$. Concluir que si A es cerrado en X y B es cerrado en Y, entonces $A \times B$ es cerrado en $X \times Y$.

23) **Topología de Zariski en k^n (tener en mente $k = \mathbb{R}$ o $k = \mathbb{C}$).**

Consideremos el anillo de polinomios en n variables sobre un cuerpo k, $k[x] = k[x_1, \dots, x_n]$. Para cada subconjunto $S \subseteq k[x]$ definimos el conjunto algebraico dado por S como

$$V(S) = \{(z_1, \dots, z_n) \in k^n : \ f(z_1, \dots, z_n) = 0 \ \forall \ f \in S\}.$$

Verificar las siguientes propiedades

a) Si $S \subseteq T \subseteq k[x]$, entonces $V(S) \supseteq V(T)$.

b) $V(S) = V(I_S)$, donde I_S es el ideal generado por S.

c) $V(\{0\}) = k^n$, y $V(\{1\}) = \emptyset$.

d) Si $I, J \subseteq k[x]$ son ideales, entonces $V(I \cap J) = V(I) \cup V(J)$.

e) Si $\{I_a\}_{a \in A}$ es una familia de ideales, entonces $V\left(\bigcup_{a \in A} I_a\right) = \bigcap_{a \in A} V(I_a)$.
Observación: los items c), d), e) muestran que los conjuntos algebraicos verifican los axiomas de los cerrados de una topología. Esta es la topología de Zariski de k^n.

f) Sea para $f \in k[x]$ el abierto $D_f = k^n \setminus V(\{f\})$. Probar que la familia $\mathcal{B} = \{D_f : f \in k[x]\}$ es una base para dicha topología.

g) Los abiertos D_f son densos si f es no nulo y k es infinito.

24) Caracterizar la topología de Zariski de k. Compararla con la usual en el caso en que $k = \mathbb{R}$ ó $k = \mathbb{C}$.

25) Comparar la topología de Zariski en $k \times k$ con la topología producto, considerando a cada copia de k con la topología de Zariski.