Práctica 8: Movimiento Browniano

Ejercicio 1. Probar que un proceso $B = (B_t)_{t\geq 0}$ es un movimiento Browniano en $\mathbb{R}^d$ si y sólo si satisface las siguientes condiciones:

- B tiene trayectorias continuas.
- B es un proceso Gaussiano, i.e. todas sus distribuciones finito-dimensionales son normales multivariadas.
- $\mathbb{E}(B_t) = \vec{0}$ para todo $t \geq 0$ y $\mathrm{Cov}(B_s, B_t) = \min\{s,t\} \cdot I_d$ para todo par $s, t \geq 0$.

Ejercicio 2. Sea $\mathcal{G}_\infty^B = \bigcap_{t\geq 0} \sigma(B_s : s \geq t)$ la σ-álgebra cola de B. Probar que $\mathcal{G}_\infty^B$ es trivial, i.e. para todo $A \in \mathcal{G}_\infty^B$ se tiene $P(B \in A) \in \{0,1\}$.

Ejercicio 3. Probar que casi seguramente se tiene que

$$\limsup_{t\to+\infty} \frac{B_t}{\sqrt{t}} = +\infty \qquad \text{y} \qquad \liminf_{t\to+\infty} \frac{B_t}{\sqrt{t}} = -\infty.$$

Ejercicio 4. Probar que B es *puntualmente recurrente*, i.e.

$$P(B^{-1}(\{x\}) \text{ es no acotado para todo } x \in \mathbb{R}) = 1.$$

Ejercicio 5. Probar que $P(\max_{0\leq s\leq t} B_s \text{ se alcanza en un único punto}) = 1$ para todo $t \geq 0$. Deducir que casi seguramente cada valor extremo de B se alcanza una única vez.

Ejercicio 6. Sea $\mathcal{Z} = \{t \geq 0 : B_t = 0\}$ el conjunto de ceros de B.

1. Probar que $\mathcal{Z}$ es cerrado y casi seguramente no acotado.
2. Probar que casi seguramente $\mathcal{Z}$ tiene medida de Lebesgue nula.

   Sugerencia. Pruebe que $(t,\omega) \mapsto B_t(\omega)$ es $\mathcal{B}(\mathbb{R})\otimes\mathcal{F}$-medible y luego que $|\mathcal{Z}|$ es una variable aleatoria. Calcule $\mathbb{E}(|\mathcal{Z}|)$ utilizando el Teorema de Fubini-Tonelli.
3. *a*) Para $t \geq 0$ sean los tiempos de parada

   $$R_t^{(1)} = \inf\{u \geq t : B_u = 0\} \qquad \text{y} \qquad R_t^{(2)} = \inf\{u > R_t^{(1)} : B_u = 0\}.$$

   Probar que $P(R_t^{(2)} = R_t^{(1)}) = 1$.

   b) Concluir que, salvo quizás por un evento de probabilidad nula, $\mathcal{Z}$ es perfecto, i.e. no tiene puntos aislados. Recordar que en tal caso $\mathcal{Z}$ resulta no numerable.