Práctica 6: Procesos a tiempo continuo

Ejercicio 1. En una fabrica hay dos máquinas idénticas, el tiempo que demoran en romperse esta dado por una exponencial de parámetro λ y el tiempo que tardan en repararlas esta dado por una de parámetro μ. Calcular la esperanza para el número de maquinas en funcionamiento (asumiendo que el sistema ya llego al equilibrio).

Ejercicio 2. Una central telefónica puede atender hasta N llamadas. Una comunicación se origina en el intervalo de tiempo $(t, t+h]$ con probabilidad $\lambda h + o(h)$ para cierto $\lambda > 0$. Las comunicaciones se originan de forma independiente. Si las N lineas están ocupadas, la llamada se pierde. La duración de una llamada tiene distribución exponencial de tasa μ para cierto $\mu > 0$. ¿Cuál es la probabilidad de que una llamada se pierda?

Ejercicio 3. Sea X una cadena de Markov a tiempo continuo con espacio de estados $\mathbb{N}_0$ y generador dado por

$$Q = \begin{pmatrix} -\lambda_0 & \lambda_0 & 0 & 0 & \dots \\ q\lambda_1 & -\lambda_1 & p\lambda_1 & 0 & \dots \\ q\lambda_2 & 0 & -\lambda_2 & p\lambda_2 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

para $p, q, \lambda_k > 0$ con $p + q = 1$. Probar que $X_n = X(\tau_n)$ es recurrente positiva, donde $\tau_0 = 0$ y

$$\tau_n = \text{ínf}\{t \geq \tau_{n-1} : X(t) \neq x(\tau_{n-1})\},$$

pero si $\lambda_k = p^k$, $\mathbb{E}_0[T_0] = \infty$ y por lo tanto X no lo es.

Ejercicio 4. Yule process. En este modelo cada partícula se multiplica por dos a tasa β, entonces $q(i, i+1) = \beta i$. Probar que empezando con una partícula a tiempo 0,

$$\mathbb{P}(X_t = j) = e^{-\beta t}(1 - e^{-\beta t})^{j-1}.$$

Ejercicio 5. Un servidor atiende a tasa μ y le llegan tareas a tasa λ ($\mu > \lambda$).

a) ¿Cuál es la esperanza para el tiempo que demora en resolverse una tarea al llegar?

b) Si el servidor está desocupado y le llega una tarea, ¿cuál es la esperanza para el tiempo que pasa hasta que vuelva a estar desocupado?