# Práctica 4: Martingalas

*"A mathematician is a person who can find analogies between theorems; a better mathematician is one who can see analogies between proofs and the best mathematician can notice analogies between theories."*
Stefan Banach.

---

**Ejercicio 1.** Probar que si $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una martingala con respecto a una cierta filtración $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ entonces también lo es con respecto a su filtración natural.

**Ejercicio 2.** Sea $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un proceso integrable a valores en un conjunto numerable $E \subset \mathbb{R}$. Probar que $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una martingala con respecto a su filtración natural si y sólo si

$$\mathbb{E}(X_{n+1}|X_1 = x_1, \ldots, X_n = x_n) = x_n$$

para toda elección $x_1, \ldots, x_n \in E$ con $P(X_1 = x_1, \ldots, X_n = x_n) > 0$ y todo $n \in \mathbb{N}$.

**Ejercicio 3.** Sean $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una martingala y $\phi$ una función convexa tal que $(\phi(X_n))_{n\in\mathbb{N}} \subseteq L^1$. Probar que $\big(\phi(X_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ es una submartingala.

**Ejercicio 4.** Sea $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espacio de probabilidad y $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ una filtración en este espacio. Mostrar que un proceso integrable y $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$-adaptado $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ es una martingala si y sólo si para cualquier tiempo de parada acotado $T$ se tiene que $\mathbb{E}(X_T) = \mathbb{E}(X_0)$.

**Ejercicio 5.** Sea $T$ un tiempo de parada con respecto a una filtración $(\mathcal{F}_n)_{n\in N}$ tal que existen un número natural $N$ y $\varepsilon > 0$ que satisfacen

$$P(T \leq N + n | T \geq n) \geq \varepsilon$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Mostrar que $\mathbb{E}(T) < +\infty$.

---

## Convergencia de martingalas

---

**Ejercicio 6.** Sea $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de variables aleatorias i.i.d. Bernoulli de parámetro $\frac{1}{2}$. Definimos para cada $n \in \mathbb{N}$

$$Y_n := \prod_{i=1}^{n} 2X_i.$$

a) Probar que $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una martingala con respecto a su filtración generada.

b) Mostrar que $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tiene límite en casi todo punto. ¿Cuál es dicho límite?

c) Mostrar que no existe $Y \in L^1$ tal que $Y_n = \mathbb{E}(Y|Y_1, \ldots, Y_n)$ para todo $n \in \mathbb{N}$. ¿Puede ser $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uniformemente integrable?

d) Probar que no existe $C$ tal que $\mathbb{E}\left(\max_{1\leq k\leq n} Y_k\right) \leq C\mathbb{E}(Y_n)$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Concluir que la desigualdad de Doob no puede valer para $p = 1$.

**Ejercicio 7.** Sea $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una martingala en $L^2$.

a) Mostrar que los incrementos $(X_{n+1} - X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ son ortogonales.

b) Concluir que $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una martingala acotada en $L^2$ si y sólo si

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{E}\big[(X_{n+1} - X_n)^2\big] < +\infty.$$

c) Concluir que toda martingala acotada en $L^2$ tiene límite (en $L^2$).

**Definición**. Sea $(\mathcal{G}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión decreciente de $\sigma$-álgebras sobre un espacio muestral. Un proceso estocástico $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ se dice una *martingala reversa* con respecto a $(\mathcal{G}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ si satisface las siguientes condiciones:

i. $X_n$ es integrable para todo $n \in \mathbb{N}$,

ii. $X_n$ es $\mathcal{G}_n$-medible para todo $n \in \mathbb{N}$,

iii. $\mathbb{E}(X_n|\mathcal{G}_{n+1}) = X_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

**Ejercicio 8.** Probar que toda martingala reversa es uniformemente integrable.

**Ejercicio 9.** Adaptar el Teorema de convergencia de supermartingalas de Doob para mostrar que si $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una martingala reversa respecto a $(\mathcal{G}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ entonces

$$X_n \xrightarrow[L^1]{cs} X_\infty := \mathbb{E}(X_1|\mathcal{G}_\infty),$$

donde $\mathcal{G}_\infty := \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{G}_n$. Probar además que si $X_1 \in L^p$ con $p > 1$ entonces $X_n \xrightarrow{L^p} X_\infty$.

---

## Aplicaciones

---

**Ejercicio 10.** Sea $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ un proceso de ramificación con distribución de progenie $\xi \in L^2(\mathbb{N}_0)$. Definamos las cantidades $\mu := \mathbb{E}(\xi)$ y $\sigma^2 := \mathrm{Var}(\xi)$.

a) Probar que $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definido por $M_n := \frac{Z_n}{\mu^n}$ para cada $n \in \mathbb{N}$ es una martingala.

b) Mostrar que para todo $n \in \mathbb{N}$ vale

$$\mathbb{E}(Z_{n+1}^2|\mathcal{F}_n) = \sigma^2 Z_n + \mu^2 Z_n^2.$$

c) Deducir que $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en $L^2$ si y sólo si $\mu > 1$.

d) Mostrar que el proceso $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ no es uniformemente integrable si $\mu \leq 1$.

e) Mostrar que si $\mu > 1$ entonces

$$\mathbb{E}(M_\infty) = 1 \qquad \text{y} \qquad \mathrm{Var}(M_\infty) = \frac{\sigma^2}{\mu^2 - \mu}.$$

f) Probar que si $\mu > 1$ entonces

$$P(M_\infty > 0) = P(Z_n > 0 \text{ para todo } n \in \mathbb{N}).$$

Concluir que si $\mu > 1$ entonces $P(\{M_\infty > 0\} \triangle \{Z_n > 0 \text{ para todo } n \in \mathbb{N}\}) = 0$. ¿Qué nos dice esto sobre el crecimiento de $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ cuando no hay extinción?

**Ejercicio 11.** Consideremos un juego de azar en donde la ganancia neta por unidad apostada en el $n$-ésimo juego es $\varepsilon_n$, donde $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de variables aleatorias i.i.d. con distribución dada por

$$P(\varepsilon_n = 1) = p = 1 - P(\varepsilon_n = -1)$$

para cierto $p > \frac{1}{2}$. La apuesta $C_n$ en el $n$-ésimo juego debe estar entre 0 y $Z_{n-1}$, donde $Z_{n-1}$ es la fortuna disponible al instante $n-1$. Nuestro objetivo es maximizar la "tasa de interés" esperada $\mathbb{E}[\log(Z_N/Z_0)]$, donde $N$ es un número que representa la longitud del juego y $Z_0$, la fortuna inicial disponible, una cierta constante dada. Llamaremos estrategia al cociente entre lo que se apuesta en cada paso y el dinero que se tiene en el paso anterior, o sea, a $(C_{n+1}/Z_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

a) Mostrar que si $(C_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es previsible (es decir, si $C_n$ es $\mathcal{F}_{n-1}$-medible $\forall n \in \mathbb{N}$) el proceso estocástico $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definido para cada $n \in \mathbb{N}$ por la fórmula

$$X_n := \log Z_n - n\alpha$$

es un supermartingala, donde $\alpha$ denota la *entropía* dada por

$$\alpha = p \log p + (1-p)\log(1-p) + \log 2,$$

de modo tal que $\mathbb{E}[\log(Z_N/Z_0)] \leq N\alpha$.

b) Probar que existe una estrategia para la cual $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ resulta una martingala, y que, en ese caso, $\mathbb{E}[\log(Z_N/Z_0)] = N\alpha$. ¿Cuál es la mejor estrategia?

**Ejercicio 12. Urna de Polya**. Tenemos una urna que contiene una bolilla blanca y otra negra. Extraemos al azar una bolilla de dicha urna y la volvemos a colocar junto con otra bolilla del mismo color. Repetimos el mismo procedimiento indefinidamente obteniendo así, tras $n$ pasos, $N_n + 1$ bolillas negras y $n + 1 - N_n$ blancas en la urna, siendo $N_n$ la cantidad de bolillas negras que fueron extrídas en las primeras $n$ extracciones.

a) Sea $M_n := \frac{N_n+1}{n+2}$ la proporción de bolillas negras en la urna tras $n$ extracciones. Probar que $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una martingala que converge en $L^p$ para todo $p \geq 1$.

b) Probar que $P(N_n = k) = \frac{1}{n+1}$ para todo $k = 0, \ldots, n$ y todo valor de $n \in \mathbb{N}$. ¿Cuál es la distribución de $M_\infty$?

c) Mostrar que para cada $0 < \theta < 1$ el proceso $(P_n^\theta)_{n\in\mathbb{N}}$ definido para cada $n \in \mathbb{N}$ por la fórmula

$$P_n^\theta := \frac{(n+1)!}{N_n!(n-N_n)!}\theta^{N_n}(1-\theta)^{n-N_n}$$

es una martingala.

**Ejercicio 13. Urna de Bayes**. Sea $U$ una variable aleatoria con distribución $\mathcal{U}([0,1])$ y $X_1, \ldots, X_n$ variables aleatorias independientes entre sí con distribución Bernoulli de parámetro $U$. Sea además $\tilde{N}$ el vector aleatorio de coordenadas $\tilde{N}_k := \sum_{i=1}^{k} X_i$ para $k = 1, \ldots, n$.

1. Probar que $\tilde{N}$ tiene la misma distribución que $(N_1, \ldots, N_n)$ en la urna de Polya.

2. Mostrar que $P_n^\theta$ es una densidad condicional de $U$ dado $\tilde{N}$.

**Ejercicio 14.** Sea $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de variables aleatorias i.i.d. en $L^1$ no idénticamente nulas. Recordemos que si $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es el paseo al azar asociado entonces el proceso $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definido para cada $n \in \mathbb{N}$ por la fórmula

$$Y_n := S_n - n\mathbb{E}(X_1)$$

resulta una martingala con respecto a la filtración natural $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

a) Sea $T$ un tiempo de parada finito con respecto a $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Probar que

$$\mathbb{E}(|S_{T\wedge n} - S_T|) \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} \mathbb{E}(|X_k|\mathbf{1}_{\{T\geq k\}}) \leq \mathbb{E}(|X_1|)\mathbb{E}(T\mathbf{1}_{\{T\geq n+1\}}).$$

Concluir que si $\mathbb{E}(T) < +\infty$ entonces $S_{T\wedge n} \xrightarrow{L^1} S_T$ y $\mathbb{E}(S_T) = \mathbb{E}(X_1)\mathbb{E}(T)$.

b) Supongamos que $\mathbb{E}(X_1) = 0$ y para $b > 0$ sea $T_b := \inf\{n \in \mathbb{N} : S_n > b\}$. Mostrar que $\mathbb{E}(T_b) = +\infty$.

c) Sean $a < 0 < b$ y $T_{a,b} := \inf\{n \in \mathbb{N} : S_n \notin [a,b]\}$. Probar que $\mathbb{E}(T_{a,b}) < +\infty$.

**Ejercicio 15. La ruina del apostador**. Sea $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de variables aleatorias i.i.d. con distribución dada por

$$P(X_1 = 1) = p \quad \text{y} \quad P(X_1 = -1) = q = 1 - p$$

con $p \neq q$. Dados $a < b \in \mathbb{N}$, para cada $n \in \mathbb{N}$ definimos

$$S_n^{(a)} = a + X_1 + ... + X_n \quad \text{y} \quad T^{a,b} = \inf\{n : S_n^{(a)} = 0 \text{ ó } S_n^{(a)} = b\}.$$

Además, sean $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $(N_n)_{n\in\mathbb{N}}$ los procesos definidos para cada $n \in \mathbb{N}$ como

$$M_n := \left(\frac{q}{p}\right)^{S_n^{(a)}} \quad \text{y} \quad N_n := S_n^{(a)} - (p-q)n.$$

a) Probar que $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $(N_n)_{n\in\mathbb{N}}$ son martingalas. ¿Con respecto a qué filtración?

b) Calcular las cantidades $P(S_{T^{a,b}}^{(a)} = 0)$ y $\mathbb{E}(S_{T^{a,b}}^{(a)})$.

c) Calcular $\mathbb{E}(T^{a,b})$.