Práctica 3: Esperanza condicional

"The theory of probabilities is at bottom nothing but common sense reduced to calculus; it enables us to appreciate with exactness that which accurate minds feel with a sort of instinct for which ofttimes they are unable to account."
Pierre-Simon Laplace

Ejercicio 1. Sean $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espacio de probabilidad y $\mathcal{G}$ una σ-álgebra contenida en $\mathcal{F}$ tal que $P(B) \in \{0, 1\}$ para todo $B \in \mathcal{G}$.

a) Caracterizar las variables aleatorias $\mathcal{G}$-medibles.

b) Calcular $\mathbb{E}(X|\mathcal{G})$ para cualquier variable aleatoria X integrable.

Ejercicio 2. Sea $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espacio de probabilidad y sea $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{F}$ una partición de Ω. Consideremos la σ-álgebra generada por la partición $\mathcal{G} = \sigma(A_n : n \in \mathbb{N})$.

a) Caracterizar los conjuntos pertenecientes a $\mathcal{G}$.

b) Caracterizar las variables aleatorias $\mathcal{G}$-medibles.

c) Deducir una expresión explícita para $\mathbb{E}(X|\mathcal{G})$ para cualquier variable aleatoria X integrable.

d) Concluir que la expresión encontrada en el ítem anterior caracteriza $\mathbb{E}(X|Y)$ para toda Y variable aleatoria discreta. Observar que, en este caso, $\mathbb{E}(X|Y)$ también resulta una variable aleatoria discreta.

Ejercicio 3. Sean $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espacio de probabilidad y $\mathcal{G}$ una σ-álgebra contenida en $\mathcal{F}$. Sean X e Y dos variables aleatorias definidas sobre este espacio tales que Y es $\mathcal{G}$-medible y X es independiente de $\mathcal{G}$. Probar que para toda f función medible Borel no negativa

$$\mathbb{E}(f(X, Y)|\mathcal{G}) = \int_{\Omega_1} f(x, Y)\, dP_X(x).$$ [1]

Ejercicio 4. ¿Es la esperanza condicional una propiedad distribucional?
Sean $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espacio de probabilidad y $\mathcal{G}$ una cierta σ-álgebra contenida en $\mathcal{F}$. ¿Es cierto que si dos variables aleatorias X e Y definidas en $(\Omega, \mathcal{F})$ tienen la misma distribución entonces $\mathbb{E}(X|\mathcal{G})$ y $\mathbb{E}(Y|\mathcal{G})$ tienen también la misma distribución?

[1] Notar que, en el caso $\mathcal{G} = \sigma(Y)$, esto justifica el razonamiento intuitivo

$$\text{“ } \mathbb{E}(f(X, Y)|Y = y) = \mathbb{E}(f(X, y)|Y = y) = \mathbb{E}(f(X, y)) \text{ ”}$$

si X e Y son independientes.

Ejercicio 5. Una familia $(X_\alpha)_{\alpha\in\Gamma}$ de variables aleatorias en un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ se dice *intercambiable* si para toda elección de $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \Gamma$ distintos la distribución del vector aleatorio $X = (X_{\alpha_1}, \ldots, X_{\alpha_n})$ coincide con la de $X_\sigma{=}(X_{\alpha_{\sigma(1)}}, \ldots, X_{\alpha_{\sigma(n)}})$ para cualquier permutación de índices σ.

a) Probar que si X es una variable aleatoria simétrica respecto del origen entonces el vector $(X, -X)$ es intercambiable.

b) Probar que toda familia de variables aleatorias i.i.d. es intercambiable.

c) Probar que si el vector $X = (X_1, \ldots, X_n)$ es intercambiable y X_1 es integrable entonces para todo $1 \leq i \leq n$ vale

$$\mathbb{E}\Big(X_1\Big|\sum_{i=1}^{n} X_i\Big) = \mathbb{E}\Big(X_i\Big|\sum_{i=1}^{n} X_i\Big).$$

Deducir una expresión explícita para $\mathbb{E}(X_1|\sum_{i=1}^n X_i)$. Interpretar.

Independencia condicional

Sean $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espacio de probabilidad y $\mathcal{G}$ una cierta σ-álgebra contenida en $\mathcal{F}$. Dos variables aleatorias X e Y definidas sobre $(\Omega, \mathcal{F})$ se dicen *independientes dada* $\mathcal{G}$ si para todo par de funciones medibles Borel no negativas $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ se verifica

$$\mathbb{E}(f(X)g(Y)|\mathcal{G}) = \mathbb{E}(f(X)|\mathcal{G})\mathbb{E}(g(Y)|\mathcal{G}).$$

Ejercicio 6. ¿Cuándo son dos variables aleatorias X e Y independientes dada la σ-álgebra trivial? ¿Y dada $\mathcal{F}$?

Ejercicio 7.

a) Mostrar que X e Y son independientes dada una cierta σ-álgebra $\mathcal{G}$ si y sólo si para cualquier par $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de funciones medibles Borel no negativas y toda variable aleatoria $\mathcal{G}$-medible Z no negativa se verifica

$$\mathbb{E}(f(X)g(Y)Z) = \mathbb{E}(f(X)Z\mathbb{E}(g(Y)|\mathcal{G})).$$

b) Mostrar que X e Y son independientes dada una cierta σ-álgebra $\mathcal{G}$ si y sólo si para toda función medible Borel $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ no negativa vale que

$$\mathbb{E}(g(Y)|\mathcal{G} \vee \sigma(X)) = \mathbb{E}(g(Y)|\mathcal{G}).$$

¿Qué nos dice esto para el caso en que $\mathcal{G}$ es la σ-álgebra trivial?

Aplicaciones

Ejercicio 8. Sean $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ una sucesión de variables aleatorias idénticamente distribuidas y N otra variable aleatoria tomando valores en $\mathbb{N}$ e independiente de la sucesión $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$. Probar que si X_1 es integrable y $\mathbb{E}(N) < +\infty$ entonces

$$S = \sum_{i=1}^{N} X_i$$

es una variable aleatoria integrable y calcular su esperanza.

Ejercicio 9.

1. Sea $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de variables aleatorias i.i.d. Bernoulli de parámetro p. Probar que $X := \text{ínf}\{n \in \mathbb{N} : X_n = 1\}$ tiene distribución $\mathcal{G}(p)$.

2. Sea $Y \sim \mathcal{G}(p)$. Calcular $\mathbb{E}(Y)$ usando técnicas de esperanza condicional.

Ejercicio 10. Sea $(U_i)_{i\in\mathbb{N}}$ una sucesión de variables aleatorias i.i.d. uniformes en el intervalo $[0,1]$. Calcular la esperanza de la variable aleatoria $N := \text{ínf}\{n \in \mathbb{N} : \sum_{i=1}^{n} U_i \geq 1\}$.

Ejercicio 11. A una fiesta concurren N personas, cada una con un sombrero. Al ingresar a la fiesta cada persona deja su sombrero en una caja grande situada en la entrada del salón. Cuando finaliza el evento, las N personas se dirigen a la entrada del salón y extraen un sombrero al azar de la caja. Aquellas personas que sacan su propio sombrero se retiran de la fiesta. El resto vuelve a colocar los sombreros que extrajeron en la caja y luego cada uno de los todavía presentes extrae nuevamente un sombrero al azar. Este procedimiento se repite hasta que las N personas se hayan retirado de la fiesta. Calcular la esperanza de R_N, la cantidad de extracciones que fueron necesarias hasta conseguir que las N personas se retiraran de la fiesta con su sombrero.