

PRÁCTICA 2: GENERALIDADES

“Any argument where one supposes an arbitrary choice to be made an uncountably infinite number of times [...] is outside the domain of mathematics.”

ÉMILE BOREL

Ejercicio 1. Sean $(\Omega_1, \mathcal{F}_1)$ y $(\Omega_2, \mathcal{F}_2)$ dos espacios medibles y sea P una probabilidad en $(\Omega_1, \mathcal{F}_1)$. Dada una función medible $X : \Omega_1 \rightarrow \Omega_2$, para $A \in \mathcal{F}_2$ definimos

$$P_X(A) := P(X^{-1}(A)).$$

- a) Demostrar que P_X es una probabilidad en $(\Omega_2, \mathcal{F}_2)$.¹
 b) Sea $f : \Omega_2 \rightarrow \mathbb{R}$ una función medible. Probar que

$$f \text{ es } P_X\text{-integrable} \iff f(X) \text{ es } P\text{-integrable}$$

y que, en dicho caso, vale la igualdad

$$\int_{\Omega_2} f dP_X = \int_{\Omega_1} f(X) dP.$$

Ejercicio 2. Sean (Ω, \mathcal{F}, P) un espacio de probabilidad e $Y : \Omega \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ una v.a. con $\mathbb{E}(Y) = 1$. Definimos para $A \in \mathcal{F}$

$$P^Y(A) := \int_A Y dP$$

- a) Demostrar que P^Y es una probabilidad en (Ω, \mathcal{F}) .
 b) Sea $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ una variable aleatoria. Probar que

$$X \text{ es } P^Y\text{-integrable} \iff XY \text{ es } P\text{-integrable}$$

y que, en dicho caso, vale la igualdad

$$\int_{\Omega} X dP^Y = \int_{\Omega} XY dP.$$

Ejercicio 3. Sean (Ω, \mathcal{F}, P) un espacio de probabilidad, X una variable aleatoria sobre éste y $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función medible Borel.

- a) Mostrar que si X es discreta y $g(X)$ es P -integrable entonces

$$\mathbb{E}(g(X)) = \sum_{x \in R_X} g(x) p_X(x)$$

- b) Mostrar que si X es absolutamente continua y $g(X)$ es P -integrable entonces

$$\mathbb{E}(g(X)) = \int_{\mathbb{R}} g(x) f_X(x) dx.$$

¹ P_X recibe el nombre de *push forward* por X de P . En el caso particular en que $(\Omega_2, \mathcal{F}_2) = (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$, entonces X resulta una variable aleatoria tradicional y P_X recibe el nombre de *distribución* de X .

Ejercicio 4. Sean (Ω, \mathcal{F}, P) un espacio de probabilidad y X una variable aleatoria definida allí.

a) i. Probar que

$$X \text{ discreta} \iff P_X \ll N_{\mathcal{A}_X}$$

donde $N_{\mathcal{A}_X}$ denota la medida de contar sobre $\mathcal{A}_X = \{x : P(X = x) > 0\}$, el conjunto de átomos de X .

ii. Mostrar que si X es discreta entonces $p_X = \frac{dP_X}{dN_{\mathcal{A}_X}}$.

b) i. Probar que

$$F_X \text{ absolutamente continua} \iff P_X \ll \mathcal{L}$$

donde \mathcal{L} denota la medida de Lebesgue sobre $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$.²

ii. Mostrar que si F_X es absolutamente continua entonces $f'_X = \frac{dP_X}{d\mathcal{L}}$.³

Ejercicio 5. Sea $F : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ una función de distribución ⁴.

a) Probar que existe una única probabilidad P_F sobre el espacio medible $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ tal que su función de distribución acumulada asociada coincide con F .

b) Deducir que en el espacio de probabilidad $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), P_F)$ la función identidad es una variable aleatoria con función de distribución acumulada F .

c) Construir en el espacio $([0, 1], \mathcal{B}([0, 1]), \mathcal{L}|_{[0,1]})$ una variable aleatoria X tal que su función de distribución acumulada sea F .

d) Sean X_1 y X_2 variables aleatorias tales que $F_{X_1} = F_{X_2}$. Probar que $P_{X_1} = P_{X_2}$.⁵

Ejercicio 6. Construir una variable aleatoria con función de distribución acumulada continua pero que no admita densidad.

Sugerencia. Considerar la función de Cantor-Lebesgue.

²Una función $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ se dice absolutamente continua si lo es sobre cada intervalo acotado $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$.

³Cuando X es absolutamente continua $\frac{dP_X}{d\mathcal{L}}$ recibe el nombre de *función de densidad* de X .

⁴Una función $F : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ se dice de distribución si $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 1$, es continua a derecha y es no decreciente.

⁵Esto muestra que para definir una distribución basta con dar su función de distribución acumulada.