

## PRÁCTICA 1: CONSTRUCCIÓN DE MEDIDAS

“A mathematician is a device for turning coffee into theorems.”  
PAUL ERDŐS

**Ejercicio 1.** Sean  $\Omega$  un conjunto y  $\mathcal{S}$  una semiálgebra sobre  $\Omega$ . Probar que la clase

$$\mathcal{A}(\mathcal{S}) = \left\{ A \in \Omega : A = \bigcup_{i=1}^n A_i \text{ con } A_1, \dots, A_n \in \mathcal{S} \text{ disjuntos} \right\}$$

es un álgebra de subconjuntos de  $\Omega$ .

**Definición.** Sea  $\Omega$  un conjunto y sea  $\mathcal{D}$  una clase de subconjuntos de  $\Omega$ . Decimos que  $\mathcal{D}$  es un  $\lambda$ -sistema si verifica las siguientes condiciones:

- (a)  $\Omega \in \mathcal{D}$
- (b)  $A \in \mathcal{D} \implies A^c \in \mathcal{D}$
- (c)  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{D}$  y  $A_n \cap A_m = \emptyset$  si  $n \neq m \implies \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathcal{D}$ .

**Ejercicio 2.** Verificar que la condición (b) en la definición de  $\lambda$ -sistema puede ser sustituida por la condición

$$(b') \quad A, B \in \mathcal{D} \text{ y } A \subseteq B \implies B \setminus A \in \mathcal{D}.$$

**Ejercicio 3.** Probar que toda clase  $\mathcal{C}$  que sea  $\pi$ -sistema y  $\lambda$ -sistema a la vez resulta una  $\sigma$ -álgebra.

**Ejercicio 4.**

- a) Probar que en el Teorema de Caratheodory-Hahn la extensión resulta única si la medida  $\mu$  es  $\sigma$ -finita sobre  $\mathcal{S}$  ( $\mu$  es  $\sigma$ -finita sobre  $\mathcal{S}$  si el espacio es unión numerable de conjuntos de  $\mathcal{S}$  de medida finita).
- b) Mostrar con un ejemplo que la extensión puede no ser única si  $\mu$  no es  $\sigma$ -finita.  
*Sugerencia.* Considere  $\mathcal{S} = \{(a, b] : -\infty \leq a < b \leq +\infty\}$  y la medida  $\mu$  sobre  $\mathcal{S}$  dada por

$$\mu(I) = \begin{cases} 0 & \text{si } I = \emptyset \\ +\infty & \text{si } I \neq \emptyset. \end{cases}$$

**Definición.** Sean  $\Omega$  un conjunto y  $\mathcal{M}$  una clase de subconjuntos de  $\Omega$ . Decimos que  $\mathcal{M}$  es una *clase monótona* sobre  $\Omega$  si verifica las siguientes condiciones:

- (a)  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{M}$  y  $A_n \subseteq A_{n+1}$  para todo  $n \in \mathbb{N} \implies \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathcal{M}$ .
- (b)  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{M}$  y  $A_{n+1} \subseteq A_n$  para todo  $n \in \mathbb{N} \implies \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathcal{M}$ .

**Ejercicio 5.** Sean  $\Omega$  un conjunto y  $\mathcal{A}$  una clase de subconjuntos de  $\Omega$ .

- a) Mostrar que  $\mathcal{M}(\mathcal{A}) \subseteq \sigma(\mathcal{A})$ , siendo  $\mathcal{M}(\mathcal{A})$  la clase monótona generada por  $\mathcal{A}$ .
- b) **Teorema de la clase monótona.** Si  $\mathcal{A}$  es un álgebra entonces  $\mathcal{M}(\mathcal{A}) = \sigma(\mathcal{A})$ .

**Ejercicio 6.** Mostrar un conjunto  $\Omega$ ,  $\mathcal{S} \subset \mathcal{P}(\Omega)$  y medidas  $\mu$  y  $\nu$  definidas allí con  $\mu(\Omega) = \nu(\Omega)$  finito pero tal que  $\mu$  y  $\nu$  no coinciden en  $\sigma(\mathcal{S})$ .