Parcial 31/10/18

Nombre y Apellido: Número de libreta:

Ejercicio 1. Sea $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ una sucesión de variables aleatorias a valores en el intervalo $[0,1]$ que satisfacen las siguientes condiciones. En primer lugar, $X_0 \equiv a$ para algún $a \in (0,1)$ y, además, para todo $n \in \mathbb{N}_0$ vale

$$P\left(X_{n+1} = \frac{X_n}{2}\middle|\mathcal{F}_n\right) = 1 - X_n \text{ y } P\left(X_{n+1} = \frac{1+X_n}{2}\middle|\mathcal{F}_n\right) = X_n$$

donde $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ denota la filtración generada.

a) Mostrar que $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ es una martingala que converge en L^p para todo $p \geq 1$.

b) Verificar que $\mathbb{E}[(X_{n+1} - X_n)^2] = \frac{\mathbb{E}[X_n(1-X_n)]}{4}$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

c) Deducir el valor de $\mathbb{E}[X_\infty(1 - X_\infty)]$ y concluir la distribución del límite X_∞.

Ejercicio 2. Un salón de fiestas con infinitas mesas redondas organiza cenas. El primero en llegar se sienta solo. Luego, el k-esimo invitado en llegar se sienta a la derecha de alguna de las $k-1$ personas sentadas con probabilidad $\frac{1}{k}$ y solo en una mesa vacía con probabilidad $\frac{1}{k}$.
Un grupo de n amigos organiza una fiesta en el salón. Aquellas personas que no se sentaron solas vuelven la noche siguiente a reencontrarse con sus amigos. Esto se repite hasta que una noche no viene nadie. Calcular la esperanza de la cantidad de cenas que se celebran.

Ejercicio 3. Sean $p, q \in (0,1)$ tal que $p + q = 1$. Consideramos la cadena de Markov en $\mathbb{N}_0$ dada por

$$p_{i,i+2} = p \quad , \quad p_{i,i-1} = q$$

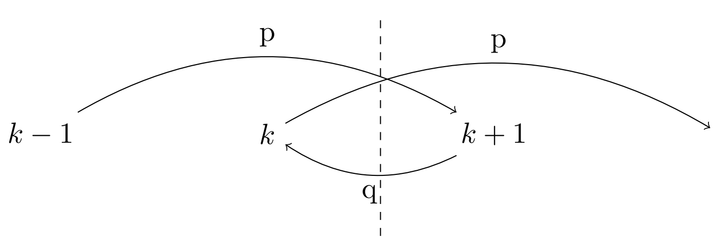
para todo $i \in \mathbb{N}$, $p_{0,2} = p$ y $p_{0,0} = q$.

a) Probar que $\mathbb{P}^1(T_0 < \infty) = 1$ si y solo si $p \leq \frac{1}{3}$.
Sugerencia: considere $r = \mathbb{P}^1(T_0 < \infty)$ y $r_n = \mathbb{P}^1(x_k = 0 \text{ para algún } 1 \leq k \leq n)$, observe que $r_n \nearrow r$, pruebe que $r = q + pr^3$ y que $r_n \leq q + pr_{n-1}^3$.

b) Observar que la cadena es irreducible y determinar en función de p si es transitiva o recurrente.

c) Probar que existe una distribución invariante π si y solo si $p < \frac{1}{3}$.

Sugerencia: pruebe que $\pi_{k+1} = \frac{p}{q}(\pi_k + \pi_{k-1})$ y que $\pi_k \leq r^k \pi_0$ donde $r = \frac{p+\sqrt{p^2+4pq}}{2q}$ es una solución de $x^2 = \frac{p}{q}(x+1)$.



d) Determinar en función de p si la cadena es recurrente nula o recurrente positiva.

Ejercicio 4. Un servidor atiende a tasa μ y le llegan tareas a tasa λ ($\lambda \neq \mu$). Una vez que llega una tarea, se pone en cola. Si al llegar ya hay N tareas en cola, la nueva tarea es descartada.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que una tarea sea descartada?

b) ¿Cuál es la esperanza para el tiempo que demora en resolverse una tarea al llegar (dado que no fue descartada)?

c) Si el servidor está desocupado y le llega una tarea, ¿cuál es la esperanza para el tiempo que pasa hasta que vuelve a estar desocupado?