Ejercicios para pensar

Ejercicio 1. (Coleccionista de cupones) Un álbum tiene N figuritas distintas. En el quiosco se pueden comprar las figuritas de a una, siempre te dan una figurita totalmente al azar y cualquiera tiene la misma probabilidad de salir. ¿Cuál es el número esperado de figuritas que debemos comprar para completar el álbum?

Ejercicio 2. (Paradoja del cumpleaños) En un grupo aleatorio de 23 personas, ¿cuál es la probabilidad de que al menos dos personas de ellas cumplan años el mismo día?

Ejercicio 3. (Problema de la secretaria) Para un único puesto hay N aspirantes. Los candidatos se pueden ordenar de mejor a peor sin ambigüedad. Son entrevistados secuencialmente en orden aleatorio. El objetivo del reclutador es contratar al mejor candidato. Luego de una estrevista el reclutador solo sabe si el candidato es el mejor de los entrevistados por el momento o no. Al finalizar la entrevista debe decidir si contratar a ese candidato o no. Una vez que se desecha un aspirante, este no puede ser contratado más tarde.
El reclutador elige c, rechaza a los primeros c aspirantes y luego contrata al primero que sea el mejor entrevistado por el momento. Siguiendo esta estrategia, ¿cuál es la probabilidad de contratar al mejor candidato? ¿Qué estrategia debe seguir el reclutador para maximizar la probabilidad de contratar al mejor candidato? ¿Cuál es el límite de dicha probabilidad?

Ejercicio 4. Doob se anota un número distinto en cada mano y las cierra de manera que Kolmogorov no los vea. Luego, K elige una mano y D le muestra el número escrito en esa mano. A continuación K debe adivinar en que mano está escrito el número más grande. Demostrar que K tiene una estrategia que le asegura tener probabilidad mayor a un medio de ganar independientemente de lo que haga D.

Ejercicio 5. (La ruina del apostador) Juan va al casino con \$100. Juega repetidamente a un juego donde apuesta \$1 cada vez. Si gana, se lleva \$2 y si pierde, no se lleva nada. Deja de jugar cuando llega a tener \$101, y se va contento de que "le ganó al casino", o cuando se queda sin dinero. Determinar la probabilidad de que Juan le gane al casino si cada vez que apuesta:

a) tiene la misma probabilidad de ganar que de perder.

b) tiene probabilidad p de ganar y $1-p$ de perder para algún valor $0 < p < 1$.

Ejercicio 6. Se tiene un mazo de n cartas ordenadas. Se las mezcla del siguiente modo, en cada paso se toma la carta superior y se la coloca en una posición al azar del mazo. Dado un orden para las cartas, probar que al cabo de $2n(1 + ln(n))$ pasos, la probabilidad de que las cartas estén en ese orden es al menos $\frac{1}{2\times n!}$.

Ejercicio 7. Sea S_n el grupo de las permutaciones de n elementos. Dada $\pi \in S_n$, definimos $r_j(\pi)$, el número de ciclos de longitud exactamente j en π, $r(\pi) = (r_1, \ldots, r_n)$ y $C(\pi) = \sum_{j=1}^{n} r_j$ el número de ciclos de π. Observar que $\sum_{j=1}^{n} jr_j = n$.

a) Se elige una permutación $\pi \in S_n$ uniformemente. Probar que dado $\mathbf{r} = (r_1, \ldots, r_n)$ con $r_j \geq 0$ y $\sum_{j=1}^n jr_j = n$, se tiene

$$\mathbb{P}(r(\pi) = \mathbf{r}) = \frac{1}{\prod_{j=1}^n j^{r_j} \times r_j!}$$

b) Se elige una permutación $\pi \in S_n$, con la distribución de Ewens de parametro $\theta > 0$, esto es

$$\mathbb{P}(\pi) = \frac{\theta^{C(\pi)}}{Z_{n,\theta}}$$

donde $Z_{n,\theta} = \prod_{j=1}^n \theta + j - 1$. Probar que

$$\mathbb{P}(r(\pi) = \mathbf{r}) = \frac{n!}{Z_{n,\theta}} \frac{\theta^{\sum_{j=1}^n r_j}}{\prod_{j=1}^n j^{r_j} \times r_j!}$$

c) En un restaurant chino con mesas redondas n personas numeradas entran en orden de a una. El primero en entrar se sienta solo. Luego, al entrar el k-esimo cliente, se sienta a la derecha de alguna de las $k-1$ personas sentadas con probabilidad $\frac{1}{\theta+k-1}$ y solo en una nueva mesa con probabilidad $\frac{\theta}{\theta+k-1}$. ¿Cuál es la probabilidad de que el i-esimo y j-esimo se sienten en la misma mesa?

d) Calcular $\mathbb{E}[C(\pi)]$ y $Var[C(\pi)]$.

e) En un restaurant italiano con mesas redondas n personas numeradas entran en un orden aleatorio de a una. El primero en entrar se sienta solo. Luego, el k-esimo cliente en entrar, se sienta a la derecha del último que entro con probabilidad $\frac{n-k+1}{\theta+n-k+1}$ y en una mesa desocupada con probabilidad $\frac{\theta}{\theta+n-k+1}$. Probar que la distribución de las personas en ambos restaurantes es la misma. Si $\ell_i(\pi)$ es la cantidad de personas en la mesa de la persona número i, calcular $\mathbb{P}(\ell_i(\pi) = t)$.

f) Probar que si π se sortea con la distribución de Ewens, $\frac{\ell_1(\pi)}{n}$ converge en distribución a $Beta(1, \theta)$ (para $\theta = 1$ esto es uniforme en $[0, 1]$). Es decir,

$$\mathbb{P}(\ell_1(\pi) \leq xn) \to \theta \int_0^x (1-x)^{\theta-1} \, dx$$

cuando $n \to \infty$ para $0 \leq x \leq 1$ y θ fijos.